Advances in Group Theory and Applications
© 2019 AGTA - www.advgrouptheory.com/journal
7 (2019), pp. 161–171 ISSN: 2499-1287
DOI: 10.32037/agta-2019-007

A History of Group Theory through the Lives of Group Theorists

Hans Fitting - Part 2

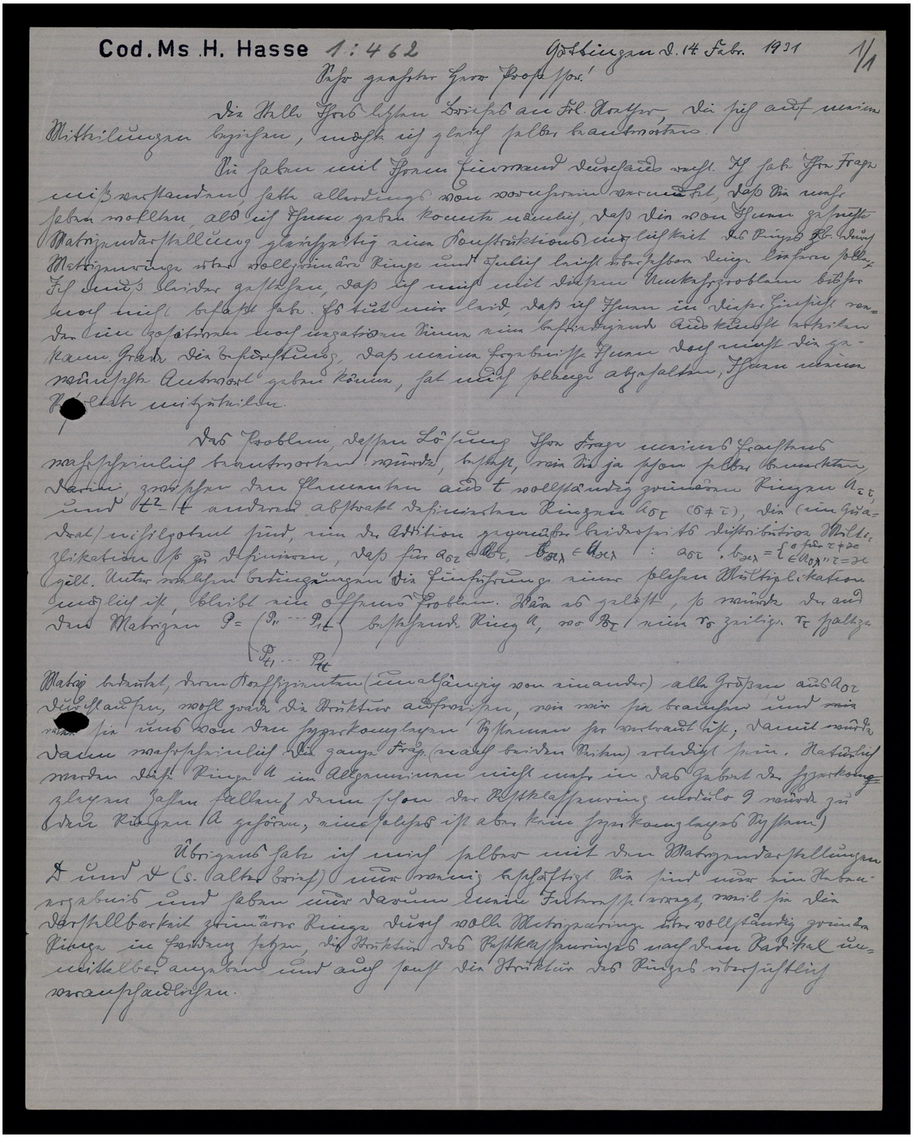
We continue here our attempt of a systematic historical account of Group Theory inspected by means of the lives and the works of its main actors. The aim is to bring the interested reader through original correspondences, published and unpublished works, historical perspectives, diatribes and friendships.

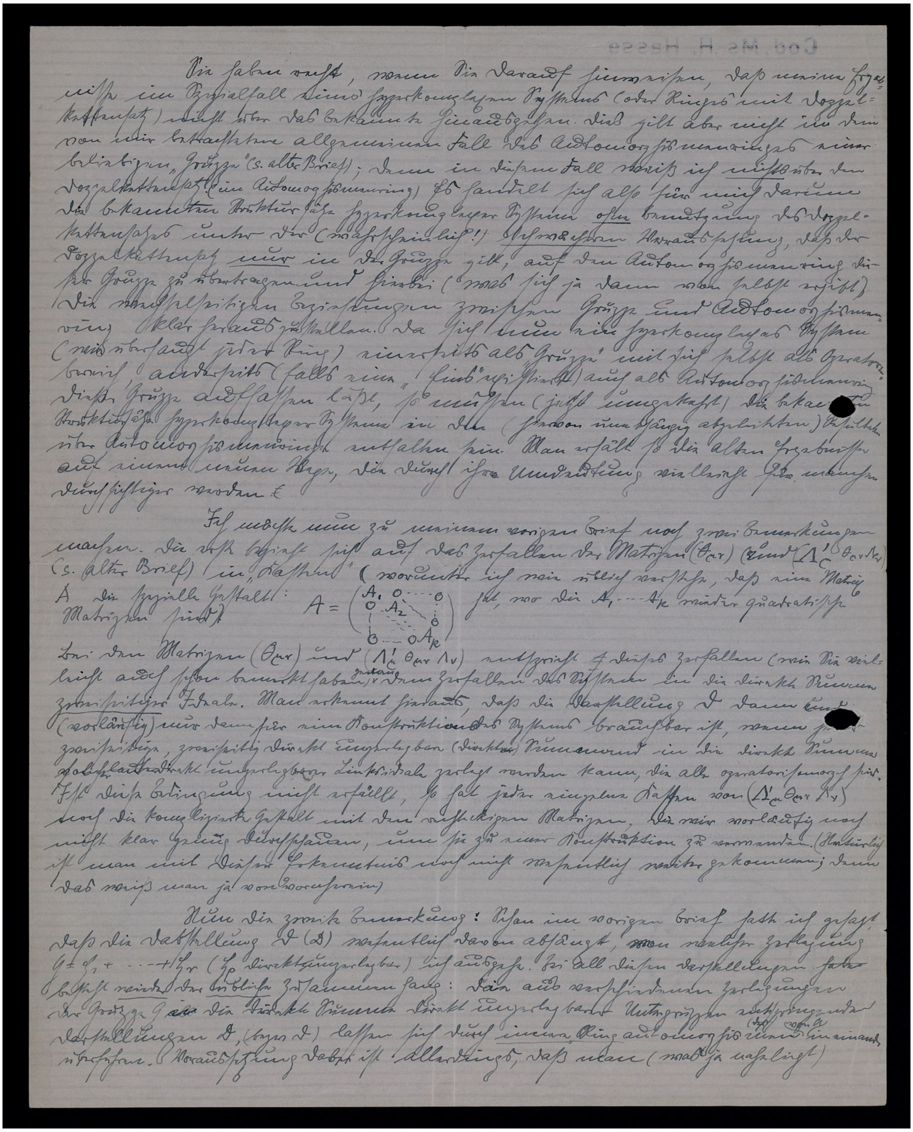
This issue is a continuation of our effort to cast new light on the life and work of Hans Fitting. Here we present a letter written by Fitting to Helmut Hasse to which a postcard by Emmy Noether is attached. For these, the reproduction of the original is proposed, followed by its transcription and translation.

We are grateful to the *Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen* for the epistolary source provided.

Mattia Brescia
Francesco de Giovanni
Marco Trombetti

Fitting to Hasse – Noether to Hasse
February 14th, 1931





Sie haben recht, wenn Sie darauf hinweisen, daß meine Ergebnisse im Spezialfall eines hyperkomplexen Systems (oder Ringes mit Doppelkettensatz) nicht über das bekannte hinausgehen. Dies gilt aber nicht in dem von mir betrachteten allgemeinen Fall des Automorphismenringes einer beliebigen „Gruppe" (s. alter Brief); denn in diesem Fall weiß ich nichts über den Doppelkettensatz (im Automorphismenring). Es handelt sich also für mich darum die bekannten Struktursätze hyperkomplexer Systeme ohne Benutzung des Doppelkettensatzes unter der (wahrscheinlich!) schwächeren Voraussetzung, daß der Doppelkettensatz nur in der Gruppe gilt, auf den Automorphismenring dieser Gruppe zu übertragen und hierbei (was sich ja dann von selbst ergibt) die wechselseitigen Beziehungen zwischen Gruppe und Automorphismenring klar herauszustellen. Da sich nun ein hyperkomplexes System (wie überhaupt jeder Ring) einerseits als „Gruppe" mit sich selbst als Operatorbereich, andererseits (falls eine „Eins" existiert) auch als Automorphismenring dieser Gruppe auffassen läßt, so müssen (jetzt umgekehrt) die bekannten Struktursätze hyperkomplexer Systeme in den (davon unabhängig abgeleiteten) Resultaten über Automorphismenringe enthalten sein. Man erhält so die alten Ergebnisse auf einem neuen Wege, die durch ihre Umdeutung vielleicht für manchen durchsichtiger werden.

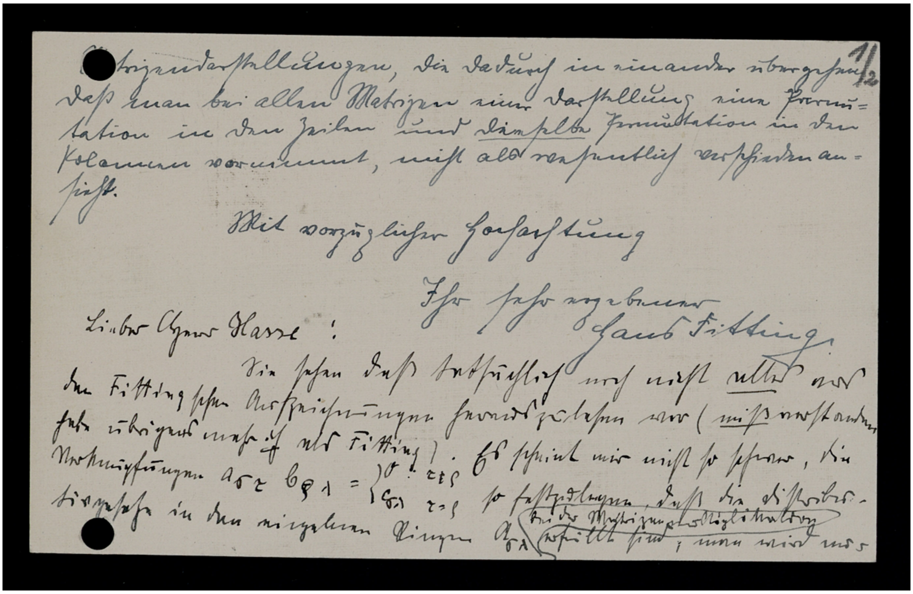
Ich möchte nun zu meinem vorigen Brief noch zwei Bemerkungen machen. Die erste bezieht sich auf das Zerfallen der Matrizen $(\theta_{\varrho\nu})$ (und $(\Lambda'_\varrho \theta_{\varrho\nu} \Lambda_\nu)$) (s. alter Brief) in „Kästchen" (worunter ich wie üblich verstehe, daß eine Matrix A die spezielle Gestalt:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

hat, wo die $A_1 \cdots A_k$ wieder quadratische Matrizen sind).

Bei den Matrizen $(\theta_{\varrho\nu})$ und $(\Lambda'_\varrho \theta_{\varrho\nu} \Lambda_\nu)$ entspricht diesem Zerfallen (wie Sie vielleicht auch schon bemerkt haben) genau dem Zerfallen des Systems in die direkte Summe zweiseitiger Ideale. Man erkennt hieraus, daß die Darstellung D dann und (vorläufig) nur dann für eine Konstruktion des Systems brauchbar ist, wenn jeder zweiseitige, zweiseitig direkt unzerlegbare (direkter) Summand in die direkte Summe [illegible] direkt unzerlegbarer Linksideale zerlegt werden kann, die alle operatorisomorph sind. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so hat jedes einzelne Kästchen von $(\Lambda'_\varrho \theta_{\varrho\nu} \Lambda_\nu)$ noch die komplizierte Gestalt mit den rechteckigen Matrizen, die wir vorläufig noch nicht klar genug durchschauen, um sie zu einer Konstruktion zu verwenden. (Natürlich ist man mit dieser Erkenntnis noch nicht wesentlich weiter gekommen; denn das weiß man ja von vornherein)

Nun die zweite Bemerkung: Schon im vorigen Brief hatte ich gesagt, daß die Darstellung D ($\mathfrak{D}$) wesentlich davon abhängt, von welcher Zerlegung $G = G_1 + \cdots + G_r$ (G_ϱ direkt unzerlegbar) ich ausgehe. Bei all diesen Darstellungen [illegible] besteht wieder der übliche Zusammenhang: Die aus verschiedenen Zerlegungen der Gruppe G ~~als~~ die direkte Summe direkt unzerlegbarer Untergruppen entspringenden Darstellungen D, (bzw. $\mathfrak{D}$) lassen sich durch inneren Ringautomorphismus ineinander überführen. Voraussetzung dabei ist allerdings, daß man (was ja naheliegt)

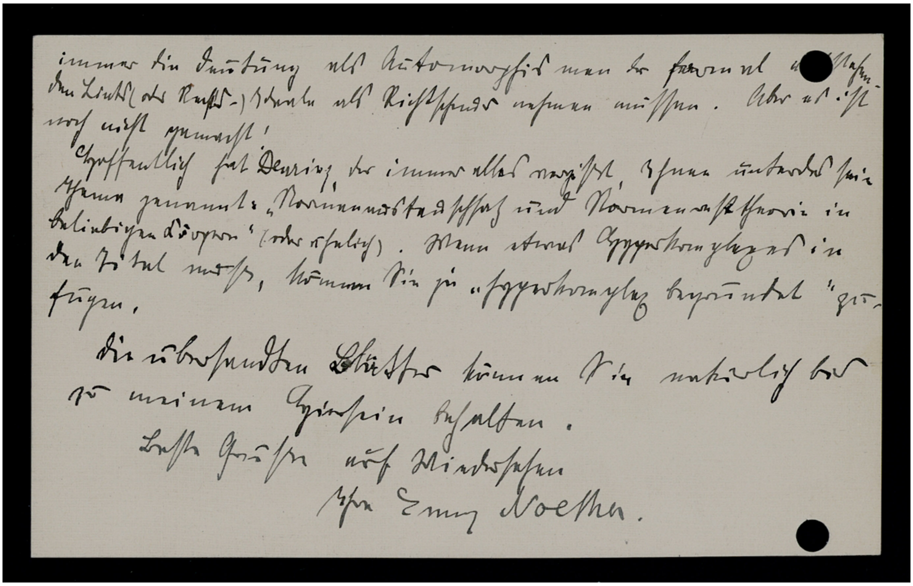


Matrizendarstellungen, die dadurch in einander übergehen, daß man bei allen Matrizen einer Darstellung eine Permutation in den Zeilen und dieselbe Permutation in den Kolonnen vornimmt, nicht als wesentlich verschieden ansieht.

Mit vorzüglicher Hochachtung

Ihr sehr ergebener
Hans Fitting

Lieber Herr Hasse!



Beste Grüße auf Wiedersehen

Ihre Emmy Noether.

Transcription

Göttingen d.14. Febr. 1931

Sehr geehrter Herr Professor!

Die Stelle Ihres letzten Briefes an Frl. Noether, die sich auf meine Mitteilungen beziehen, möchte ich gleich selber beantworten.

Sie haben mit Ihrem Einwand durchaus recht. Ich habe Ihre Frage mißverstanden, hatte allerdings von vornherein vermutet, daß Sie mehr haben wollten, als ich Ihnen geben konnte nämlich, daß die von Ihnen gesuchte Matrizendarstellung gleichzeitig eine Konstruktionsmöglichkeit des Ringes z.B. durch Matrizenringe über vollprimäre Ringe und ähnlich leicht übersehbare Dinge liefern solle. Ich muß leider gestehen, daß ich mich mit diesem Umkehrproblem bisher noch nicht befaßt habe . Es tut mir leid, daß ich Ihnen in dieser Hinsicht weder im positiven noch negativen Sinne eine befriedigende Auskunft erteilen kann. Grade die Befürchtung, daß meine Ergebnisse Ihnen doch nicht die gewünschte Antwort geben könne , hat mich solange abgehalten, Ihnen meine Resultate mitzuteilen.

Das Problem, dessen Lösung Ihre Frage meines Erachtens wahrscheinlich beantworten würde, besteht, wie Sie ja schon selber bemerkten, darin zwischen den Elementen aus t vollständig primären Ringen $\mathfrak{A}_{\tau\tau}$, und $t^2 - t$ anderen abstrakt definierten Ringen $\mathfrak{A}_{\sigma\tau}$ $(\sigma \neq \tau)$, die (im Quadrat) nihilpotent sind, eine der Addition gegenüber beiderseits Distribution Multiplikation so zu definieren, daß für $a_{\sigma\tau} \in \mathfrak{A}_{\sigma\tau},\ b_{\kappa\lambda} \in \mathfrak{A}_{\kappa\lambda}$: $a_{\sigma\tau}.b_{\kappa\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{für } \tau \neq \kappa \\ \in \mathfrak{A}_{\sigma\lambda} & \text{"}\ \tau = \kappa \end{cases}$ gilt. Unter welchen Bedingungen die Einführung einer solchen Multiplikation möglich ist, bleibt ein offenes Problem. Wäre es gelöst, so wurde der aus den Matrizen $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & \cdots & \mathcal{P}_{1t} \\ & & \\ \mathcal{P}_{t1} & \cdots & \mathcal{P}_{tt} \end{pmatrix}$ bestehend Ring $\mathfrak{A}$, wo $\mathcal{P}_{\sigma\tau}$ eine r_σ zeilige r_τ spaltige Matrix bedeutet, deren Koeffizienten (unabhängig von einander), alle Größen aus $\mathfrak{A}_{\sigma\tau}$ durchlaufen, wohl grade die Struktur aufweisen, wie wir sie brauchen und ~~wie~~ wie sie uns von den hyperkomplexen Systemen her vertraut ist; damit wurde dann wahrscheinlich die ganze Frage (nach beiden Seiten) erledigt sein. Natürlich werden diese Ringe $\mathfrak{A}$ im Allgemeinen nicht mehr in das Gebiet der hyperkomplexen Zahlen fallen (denn schon der Restklassenring modulo 9 wurde zu den Ringen $\mathfrak{A}$ gehören; ein solcher ist aber kein hy[p]erkomplexes System)

Übrigens habe ich mich selber mit den Matrizendarestellungen $\mathfrak{D}$ und D (s. alter Brief) nur wenig beschäftigt. Sie sind nur ein Nebenergebnis und haben nur darum mein Interesse erregt, weil sie die Darstellbarkeit primärer Ringe durch volle Matrizenringe uber vollständig primäre Ringe in Evidenz setzen, die Struktur des Restklassenringes nach dem Radikal unmittelbar angeben und auch sonst die Struktur des Ringes übersichtlich veranschaulichen

Sie haben recht, wenn Sie darauf hinweisen, daß meine Ergebnisse im Spezialfall eines hyperkomplexen Systems (aber Ringes mit Doppelkettensatz) nicht über das Bekannte hinausgehen. Dies gilt aber nicht in dem von mir betrachtete allgemeinen Fall des Automorphismenringes einer beliebigen „Gruppe" (s. alter Brief); denn in diesem Fall weiß ich <u>nichts</u> über den Doppelkettensatz. (im Automorphismenring) Es handelt sich als für mich darum die bekannten Struktursätze hyperkomplexen Systeme <u>ohne</u> Benutzung des Doppelkettensatzes unter der (wahrscheinlich!) <u>schwächeren</u> Voraussetzung, daß der Doppelkettensatz <u>nur</u> in der Gruppe gilt, auf den Automorphismenring dieser Gruppe zu übertragen und hierbei (was sich ja dann von selbst ergibt), die wechselseitigen Beziehungen zwischen Gruppe und Automorphismenring klar herauszustellen. Da sich nun ein hy[p]erkomplexes System (wie überhaupt jeder Ring) einerseits als „Gruppe" mit sich selbst als Operatorenbereich, anderseits (falls eine „Eins" existiert) auf als Automorphismenring dieser Gruppe auffassen laße, so müssen (jetzt umgekehrt) die bekannte Struktursätze hyperkomplexen Systeme in den (hiervon unabhängig abgeleiteten) Resultaten über Automorphismenringen entfallen sein. Man erhält so die alten Ergebnisse auf einem neuen Wege, die durch ihre Umdeutung vielleicht für manchen durchsichtiger werden.

Ich möchte nun zu meinem vorigen Brief noch zwei Bemerkungen machen. Die erste bezieht sich auf das Zerfallen der Matrizen $(\theta_{\mu\nu})$ (und $(\Lambda'_\mu \theta_{\mu\nu} \Lambda_\nu)$ (s. alter Brief) in „Kasten" (worunter ich wie üblich verstehe, daß eine Matrix A die spezielle Gestalt: $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_k \end{pmatrix}$ hat, wo die $A_1 \dots A_k$ wieder quadratische Matrizen sind). Bei den Matrizen $(\theta_{\mu\nu})$ und $(\Lambda'_\mu \theta_{\mu\nu} \Lambda_\nu)$ entspricht dieses Zerfallen (wie Sie vielleicht auch schon bemerkt haben) genau dem Zerfallen des System in die direkte Summe <u>zweiseitiger</u> Ideale. Man erkennt hieraus, daß die Darstellung D dann und (vorläufig) nur dann für eine Konstruktion des Systems brauchbar ist, wenn jeder zweiseitige, zweiseitig direkt unzerlegbare (direkter) Summand in die direkte Summe solcher ~~lauter~~ direkt unzerlegbarer Linksideale zerlegt werden kann, die alle operatorisomorph sind. Ist diese Bedingung nicht erfällt, so hat jeder einzelne Kasten von $(\Lambda'_\mu \theta_{\mu\nu} \Lambda_\nu)$ noch die komplizierte Gestalt mit den rechteckige Matrizen, die wir vorläufig noch nicht klar genug durchschauen, um sie zu einer Konstruktion zu verwenden. (Natürlich ist man mit dieser Erkenntnis noch nicht wesentlich weiter gekommen; denn das weiß man ja von vornherein)

Nun die zweite Bemerkung : Schon im vorigen Brief hatte ich gesagt, daß die Darstellung D ($\mathfrak{D}$) wesentlich davon abhängt, von welcher Zerlegung $G = G_1 + \ldots + G_r$ (G_ρ direktunzerlegbar) ich ausgehe. Bei all diesen Darstellungen ~~haben~~ besteht <u>wieder</u> der <u>übliche</u> Zusammenhang: Die aus verschiedenen Zerlegungen der Gruppe G in die direkte Summe direkt unzerlegbarer Untergruppen entspringender Darstellungen $\mathfrak{D}$, (bezw. D) lassen sich durch <u>innere Ring</u>automorphismen von A in einander überführen. Voraussetzung dabei ist allerdings, daß man (was ja naheliegt) Matrizendarstellungen, die dadurch in einander übergehen, daß man bei allen Matrizen einer Darstellung eine Permutation in den Zeilen und <u>dieselbe</u> Permutation in den Kolonnen vornimmt, nicht als wesentlich verschieden ansieht.

Mit vorzüglicher Hochachtung
Ihr Sehr ergebener
Hans Fitting.

Lieber Herr Hasse!

Sie sehen[,] daß tatsächlich noch nicht <u>alles</u> aus den Fittingschen Aufzeichnungen herauszulesen war (<u>miß</u>verstanden habe übrigens mehr <u>ich</u> als Fitting). Es scheint mir nicht so schwer, die Verknüpfungen $a_{\sigma\tau}\ b_{\rho\lambda} = \begin{cases} 0 & : \tau \neq \rho \\ c_{\sigma\lambda} & \tau = \rho \end{cases}$ so festzulegen, daß die Distributivgesetze in den einzelnen Ringen $\mathfrak{A}_{\sigma\lambda}$ bei der Matrizenmultiplikation erfüllt sind, man wird mir immer die Deutung als Automorphismen der formal entstehenden Links(oder Rechts-)Ideale als Richtschnur nehmen müssen. Aber es ist noch nicht gemacht!

Hoffentlich hat Deuring, der immer alles vergißt, Ihnen unterdes sein Thema genannt: „Normenaustauschsatz und Normenresttheorie in beliebigen Körper" (oder ähnlich). Wenn etwas Hyperkomplexes in den Titel muß, können Sie ja „hyperkomplex begrundet" zufügen.

Die übersendten Blätter können Sie natürlich bis zu meinem Hiersein behalten.

Beste Grüße auf Wiedersehen

Ihre Emmy Noether.

Translation

Göttingen 14th Feb. 1931

Dearest Herr Professor!

I would like to answer the passage of your last letter to Miss. Noether, which refers to my communications.

You are quite right in your objection. I misunderstood your question, but I had suspected from the beginning that you wanted more than I could give you, namely, that the matrix representation you were looking for should provide at the same time a constructional possibility for the ring, for example through matrix rings over *fully primary rings*[1], and clear things in a similarly easy way.

Unfortunately, I must confess that I have not dealt with this converse problem so far . I am sorry that in this respect I cannot give you any satisfactory information either in a positive or in a negative sense. It is the fear that my conclusions cannot give you the desired answer that has kept me from telling you my results.

The problem, the solution of which I think would probably answer your question, consists, as you have already noticed, to define a multiplication among the elements of t fully primary rings $\mathfrak{A}_{\tau\tau}$ and other $t^2 - t$ abstractly defined rings $\mathfrak{A}_{\sigma\tau}$ $(\sigma \neq \tau)$, nilpotent (in square), which is distributive over addition on both sides, such that, for $a_{\sigma\tau} \in \mathfrak{A}_{\sigma\tau}$ and $b_{\kappa\lambda} \in \mathfrak{A}_{\kappa\lambda}$, $a_{\sigma\tau}.b_{\kappa\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{for } \tau \neq \kappa \\ \in \mathfrak{A}_{\sigma\lambda} & \text{"} \ \tau = \kappa \end{cases}$ holds. Under which conditions the introduction of such a multiplication is possible remains an open problem. If it were solved, then the ring $\mathfrak{A}$

[1] The term *vollprimär* is an abbreviation for *vollständig primär*, which refers to rings with an identity whose all proper right-ideals are nilpotent; for further details, see E. Artin – "Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen", *Hamb. Abh.* 5 (1928), 251–260.

consisting of the matrices $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & \cdots & \mathcal{P}_{1t} \\ & & \\ \mathcal{P}_{t1} & \cdots & \mathcal{P}_{tt} \end{pmatrix}$, where $\mathcal{P}_{\sigma\tau}$ is a matrix with r_σ rows and r_τ columns, whose coefficients (independently from each other) range over $\mathfrak{A}_{\sigma\tau}$, would probably have the structure just as we need it and as we know it from the hypercomplex systems; then probably the whole question (in both directions) would be settled.

Of course, these rings $\mathfrak{A}$ will generally no longer fall within the area of hypercomplex numbers (for even the residue class ring modulo 9 would be among the rings $\mathfrak{A}$; but this is not a hy[p]ercomplex system)

By the way, I myself have dealt just a bit with the matrix representations $\mathfrak{D}$ and D (see old letter). They are only a side result and have aroused my interest only because they put in evidence the representability of primary rings[2] by whole matrix rings over fully primary rings, they directly show the structure of the residue class ring over the radical, and also in any case they illustrate clearly the structure of the ring.

You are right in pointing out that my results in the special case of a hypercomplex system (or anyway a ring with the double chain condition) do not go beyond the known. But this does not apply in the general case, which I am considering, of the automorphism ring[3] of any "group" (see old letter); because in this case I do not know anything about the double chain condition (in the automorphism ring). For me, the matter is to transfer onto the automorphism ring of the group the known structural results of hypercomplex systems without the use of the double chain condition under the (probably!) weaker assumption that the double chain condition only holds in this group, and thereby (which then results automatically) clearly emphasizing the mutual relations between the group and the automorphism ring. Since a hypercomplex system (like any ring in general) can be considered on the one hand as a "group" with itself as an operator domain and on the other hand (if a "one" exists)[4] as an automorphism ring of this group, then (now, conversely) the known structural propositions on hypercomplex systems cannot be applied in the results on automor-

[2] The term *primär* refers to rings with an identity whose all proper ideals are nilpotent; for further details, see *ibid.*

[3] Here the term "automorphism" stands for "endomorphism"; the groups taken in consideration are abelian.

[4] I.e., the ring contains an identity.

phism rings (independently derived from these). In this way you get the old results in a new way, which, through their reinterpretation, may become more transparent for someone.

Now, I would like to make two more remarks on my previous letter. The first one refers to the decomposition of the matrices $(\theta_{\mu\nu})$ (and $(\Lambda'_{\mu}\theta_{\mu\nu}\Lambda_{\nu})$ (see old letter) in „blocks" (by which I understand, as usual, that a matrix A has the special form: $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_k \end{pmatrix}$, where $A_1 \dots A_k$ are again square matrices). In the case of matrices $(\theta_{\mu\nu})$ and $(\Lambda'_{\mu}\theta_{\mu\nu}\Lambda_{\nu})$, this decomposition (as you may have already noticed) corresponds exactly to the decomposition of the system into the direct sum of <u>two-sided</u> ideals. It can be seen from this, that the representation D is useful for a construction of the system if and (temporarily) only if every two-sided (direct) summand, which is two-sided directly indecomposable, can be decomposed into the direct sum of such directly indecomposable left ideals, all of which are operator-isomorphic. If this condition is not fulfilled, every single block of $(\Lambda'_{\mu}\theta_{\mu\nu}\Lambda_{\nu})$ still has the complicated form with rectangular matrices, which we currently do not yet understand clearly enough to use them for a construction. (Of course, one does not go considerably much further with this knowledge; because one knows that from the start)

Now the second remark : Already in the previous letter I had said that the representation D ($\mathfrak{D}$) essentially depends on which decomposition $G = G_1 + \dots + G_r$ (G_ρ directly indecomposable) I assume. In all these representations, the <u>usual</u> connection holds <u>again</u>: The representations $\mathfrak{D}$, (resp. D) resulting from different decompositions of the group G into the direct sum of directly indecomposable subgroups can be carried into each other by <u>inner ring</u> automorphisms of A. The prerequisite for this, however, is that (obviously) one does not consider as essentially different matrix representations which intersect each other, by making a permutation in the rows and the <u>same</u> permutation in the columns for all matrices of a representation.

With deep respect
Devotedly yours
Hans Fitting.

Dear Herr Hasse!

You see that indeed not yet everything could be read from Fitting's notes (by the way, I misunderstood more than Fitting did). To me it does not seem that difficult to define the operations $\mathfrak{a}_{\sigma\tau}\ \mathfrak{b}_{\rho\lambda} = \begin{cases} 0 & : \tau \neq \rho \\ \mathfrak{c}_{\sigma\lambda} & \tau = \rho \end{cases}$ in such a way that the distributive laws are fulfilled in the particular ring $\mathfrak{A}_{\sigma\lambda}$ by matrix multiplication; to me one must take as a guideline the interpretation as automorphisms of the formally resulting left (or right) ideals. But it's not done yet!

Hopefully, Deuring, who always forgets everything, has in the meantime told you about his topic: "norm exchange lemma and norm residue theory in any field" (or something similar). If something hypercomplex has to go in the title, you can indeed add "hypercomplex-based".

Of course, you can keep the sent sheets until my visit.

Best Regards[,] goodbye

Your Emmy Noether.

Transcripted and translated by

M. Brescia, M. Trombetti
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli"
Università degli Studi di Napoli Federico II
Via Cintia, Napoli (Italy)
e-mail: mattia.brescia@unina.it; marco.trombetti@unina.it