Advances in Group Theory and Applications
© 2017 AGTA - www.advgrouptheory.com/journal
4 (2017), pp. 105–130 ISSN: 2499-1287
DOI: 10.4399/97888255086978

A History of Group Theory through the Lives of Group Theorists

Hans Fitting - Part 1

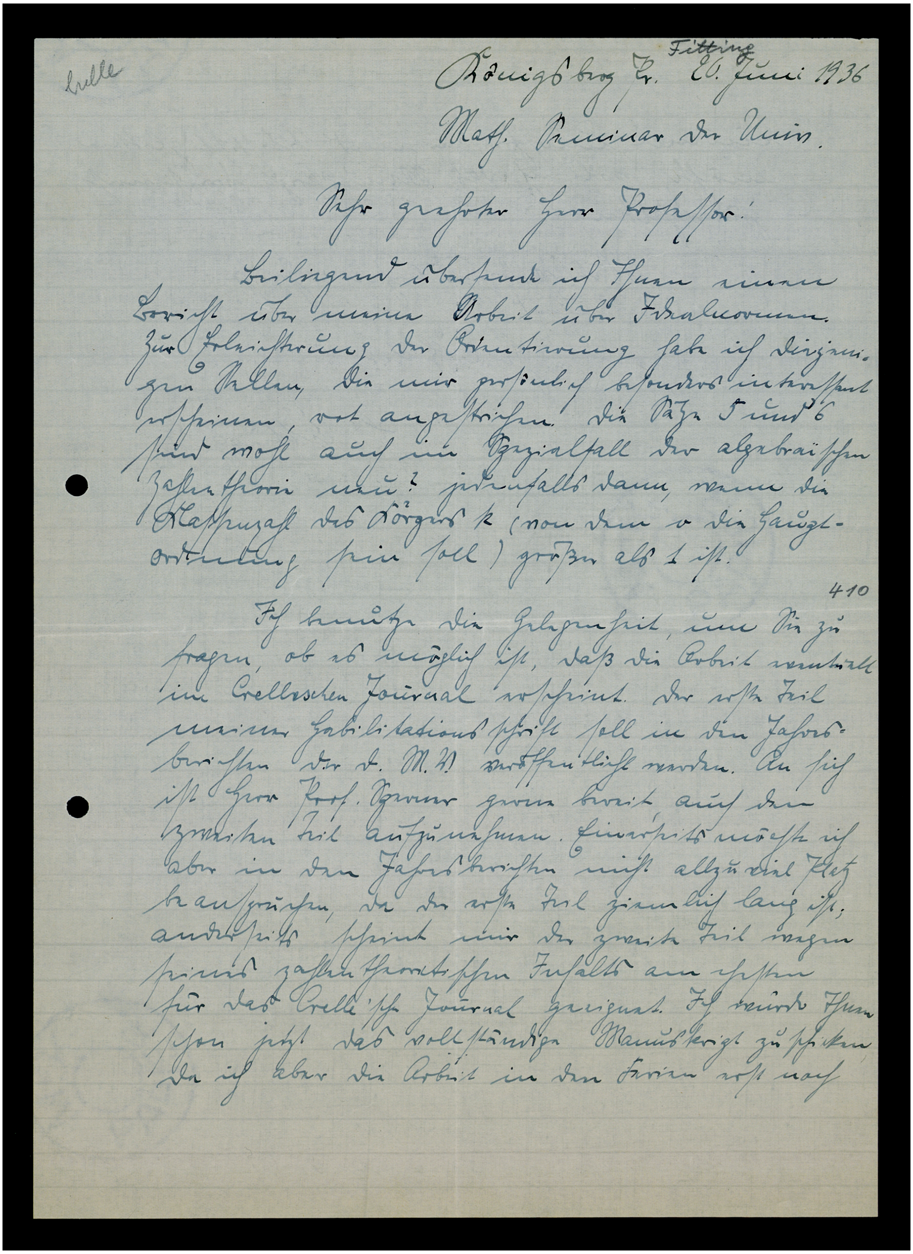
We are glad to introduce an attempt of a systematic historical account of Group Theory inspected by means of the lives and the works of its main actors. Our aim is to bring the interested reader through original correspondances, published and unpublished works, historical perspectives, diatribes and friendship.

We begin here with the publication of two letters and one postcard written by Fitting to Helmut Hasse. For each of these, the reproduction of the original is proposed, followed by its transcription and translation. This first part concerning Fitting's activity is closed by the reproduction of the second part of his *Habilitationsschrift*, that is quoted in the above correspondence.

We are grateful to the *Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen* for epistolary sources provided.

Mattia Brescia
Francesco de Giovanni
Marco Trombetti

1 Fitting to Hasse: 20 June, 1936



Crelle

Fitting
Königsberg Pr. 20. Juni 1936
Math. Seminar der Univ.

Sehr geehrter Herr Professor!

Beiliegend übersende ich Ihnen einen Bericht über meine Arbeit über Idealnormen. Zur Erleichterung der Orientierung habe ich diejenigen Stellen, die mir persönlich besonders interessant erschienen, rot angestrichen. Die Sätze 5 und 6 sind wohl auch im Spezialfall der algebraischen Zahlentheorie neu? jedenfalls dann, wenn die Klassenzahl des Körpers k (von dem o die Hauptordnung sein soll) größer als 1 ist.

410

Ich benutze die Gelegenheit, um Sie zu fragen, ob es möglich ist, daß die Arbeit eventuell im Crelleschen Journal erscheint. Der erste Teil meiner Habilitationsschrift soll in den Jahresberichten der D. M. V. veröffentlicht werden. An sich ist Herr Prof. Sperner gern bereit, auch den zweiten Teil aufzunehmen. Einerseits möchte ich aber in den Jahresberichten nicht allzu viel Platz beanspruchen, da der erste Teil ziemlich lang ist, andererseits scheint mir der zweite Teil wegen seines zahlentheoretischen Inhalts am ehesten für das Crelle'sche Journal geeignet. Ich würde Ihnen schon jetzt das vollständige Manuskript zuschicken. Da ich aber die Arbeit in den Ferien erst noch

einmal umschreiben und stilistisch glätten
möchte, will ich das Manuskript doch noch
zurückhalten.

Mit verbindlichem Gruß
und

Heil Hitler

H. Fitting.

Transcription

Königsberg Pr. 20. Juni 1936
Math. Seminar der Univ.

Sehr geehrter Herr Professor!

Beiliegend übersende ich Ihnen einen Bericht über meine Arbeit über Idealnormen. Zur Erleichterung der Orientierung habe ich diejenigen Stellen, die mir persönlich besonders interessant erscheinen, rot angestrichen. Die Sätze 5 und 6 sind wohl auch im Spezialfall der algebraischen Zahlentheorie neu? Jedenfalls dann, wenn die Klassenzahl des Körpers k (von dem $\mathfrak{o}$ die Hauptordnung sein soll) größer als 1 ist.

Ich benutze die Gelegenheit, um Sie zu fragen, ob es möglich ist, daß die Arbeit eventuell im Crelleschen Journal erscheint. Der erste Teil meiner Habilitationsschrift soll in den Jahresberichten der d.M.V. * veröffentlicht werden. An sich ist Herr Prof. Sperner gerne bereit, auch den zweiten Teil aufzunehmen. Einerseits möchte ich aber in den Jahresberichten nicht allzu viel Platz beanspruchen, da der erste Teil ziemlich lang ist; anderseits scheint mir der zweite Teil wegen seines zahlentheoretischen Inhalts am ehesten für das Crelle'schen Journal geeignet. Ich wurde Ihnen schon jetzt das vollständige Manuskript zu schicken, da ich aber die Arbeit in den Knien erst noch einmal umschreiben und stilistisch glätten möchte, will ich das Manuskript vorerst noch zürückhalten.

Mit verbindlichem Grüß
und
Heil Hitler
H. Fitting

* Die deutsche Mathematiker-Vereinigung

Translation

Königsberg Pr. 20th June 1936
Department of Math.

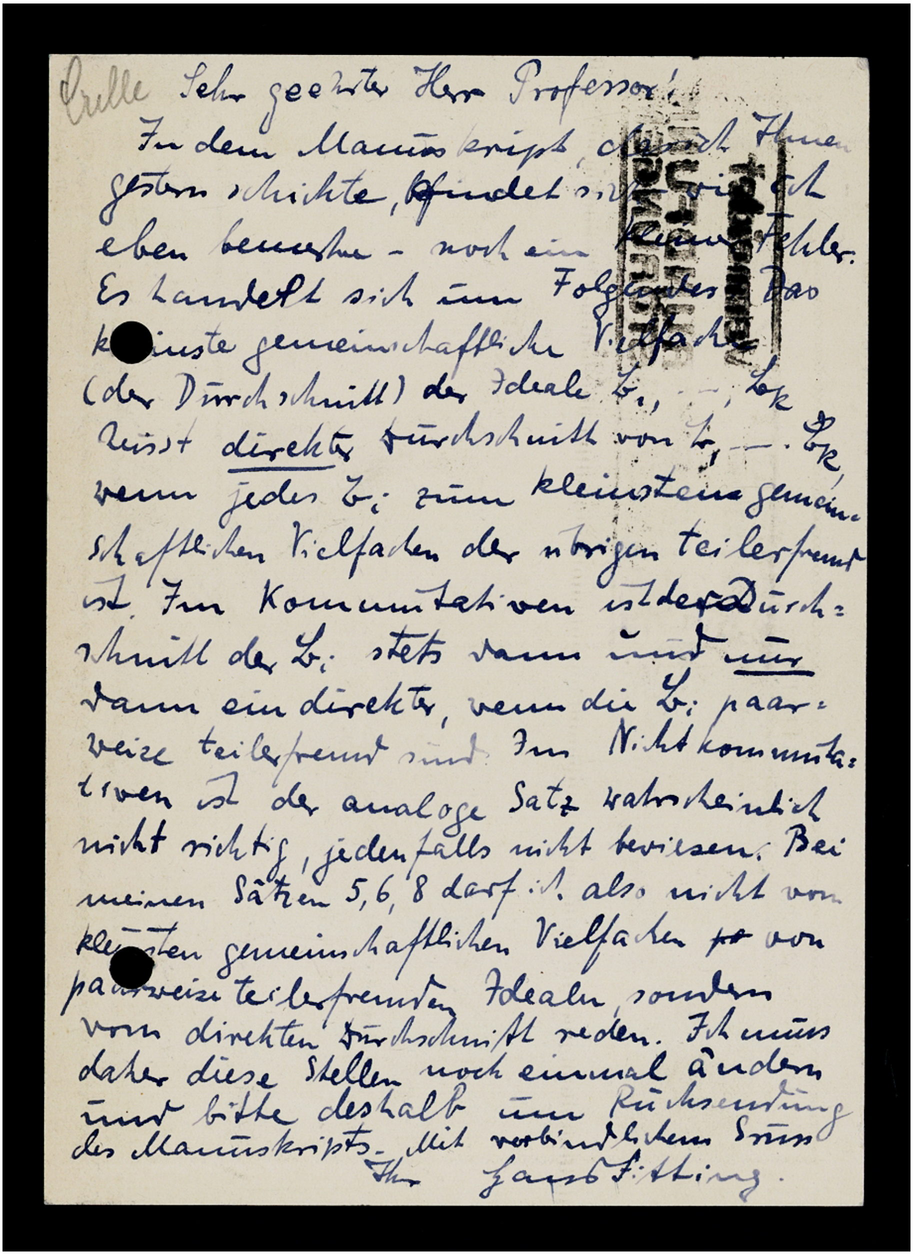
Dearest Herr Professor!

I am sending you the enclosed report on my work about ideal norms. In order to guide you through it, I have underlined in red those passages, which I personally find particularly interesting. Propositions 5 and 6 are new maybe even in the special case of algebraic number theory? at least if the class number of the division ring k (whose maximal order should be $\mathfrak{o}$) is bigger than 1.

I take the opportunity to ask you if it is possible to make the work eventually appear in Crelle's Journal. The first part of my habilitation thesis should be published in the annual reports of the German Mathematical Society. Actually, Herr Prof. Sperner is quite willing to receive the second part, too. On the one hand, however, I would like to take not too much space in the annals, since the first part is rather long; on the other hand, the second part seems to me to be most likely suitable for Crelle's Journal because of its number theoretical contents. I would have already sent you the full manuscript but, since I would like to firstly rewrite again and polish up the work, in the meanwhile I still want to withhold the manuscript.

Kindest regards
and
Heil Hitler
H. Fitting

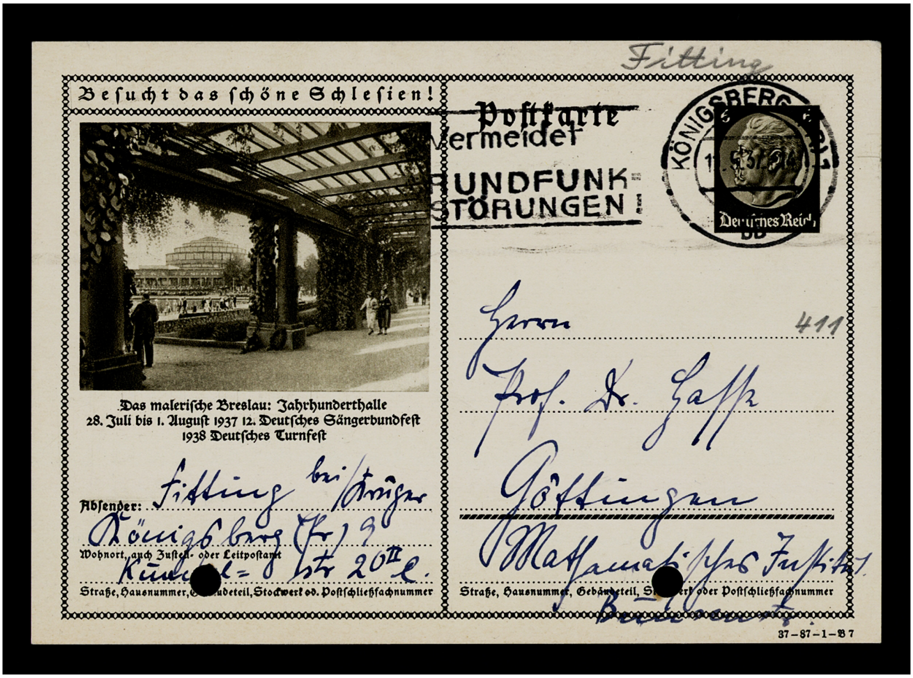
2 Fitting to Hasse: 11 May, 1937



Crelle Sehr geehrter Herr Professor!

In dem Manuskript, das ich Ihnen gestern schickte, befindet sich – wie ich eben bemerke – noch ein kleiner Fehler. Es handelt sich um Folgendes: Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (der Durchschnitt) der Ideale $L_1, \dots, L_k$ ist direkter Durchschnitt von $L_1, \dots, L_k$, wenn jedes L_i zum kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der übrigen teilerfremd ist. Im Kommutativen ist der Durchschnitt der L_i stets dann und nur dann ein direkter, wenn die L_i paarweise teilerfremd sind. Im Nichtkommutativen ist der analoge Satz wahrscheinlich nicht richtig, jedenfalls nicht bewiesen. Bei meinen Sätzen 5, 6, 8 darf ich also nicht vom kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen von paarweise teilerfremden Idealen, sondern vom direkten Durchschnitt reden. Ich muss daher diese Stellen noch einmal ändern und bitte deshalb um Rücksendung des Manuskripts. Mit verbindlichem Gruss

Ihr Hans Fitting.



Transcription

Königsberg (Pr.), den 11/5. 1937

Sehr geehrter Herr Professor!

In dem Manuskript, das ich Ihnen gestern schickte, befindet sich - wie ich eben bemerke - noch ein kleiner Fehler. Es handelt sich um Folgendes. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (der Durchschnitt) der Ideale $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_k$ heisst direkter Durchschnitt von $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_k$, wenn jedes $\mathfrak{b}_i$ zum kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der übrigen teilerfremd ist. Im Kommutativen ist der Durchschnitt des $\mathfrak{b}_i$ stets dann und nur dann ein direkter, wenn die $\mathfrak{b}_i$ paarweise teilerfremd sind. Im Nichtkommutativen ist der analoge Satz wahrscheinlich nicht richtig, jedenfalls nicht bewiesen. Bei meinen Sätze 5, 6, 8 darf ich also nicht von kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen von paarweise teilerfremden Idealen, sondern vom direkten Durchschnitt reden. Ich muss daher diese Stellen noch einmal ändern und bitte deshalb um Rücksendung des Manuskripts. Mit verbindlichem Grüss

Ihr Hans Fitting.

Translation

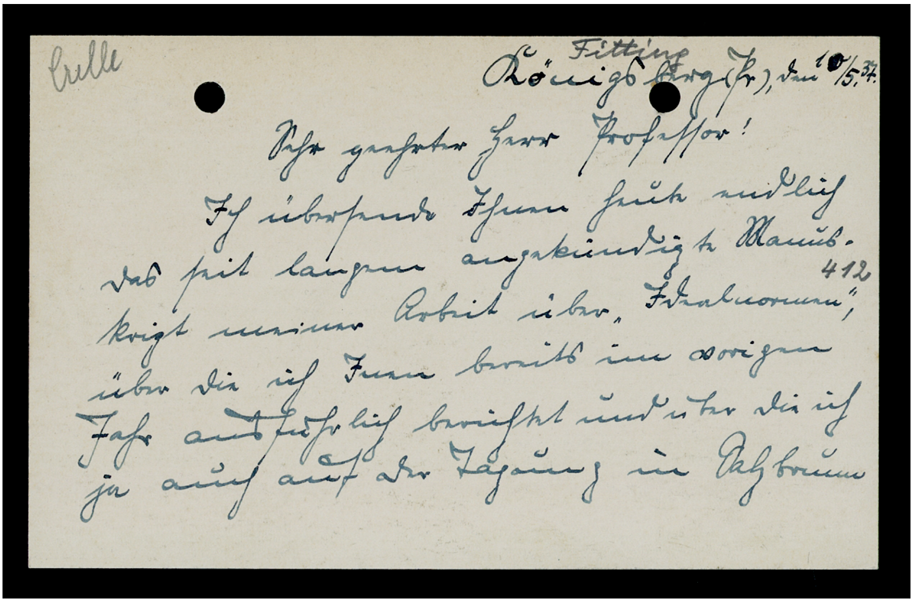
Königsberg (Pr.), 11/5 1937

Dearest Herr Professor!

In the manuscript that I sent you yesterday there is — as I just notice — another little error. We can deal with it as follows. The least common multiple (the intersection) of the ideals $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_k$ is called <u>direct</u> intersection of $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_k$, if each $\mathfrak{b}_i$ is coprime with the least common multiple of the remaining. In the commutative case the intersection of the $\mathfrak{b}_i$s is always direct if and <u>only</u> if the $\mathfrak{b}_i$s are pairwise coprime. In the non-commutative case the analogue theorem is probably not true; however this is not proved. In my propositions 5, 6, 8, I cannot speak about the least common multiple of pairwise coprime ideals, but about the direct intersection. That is why I have to change again these passages and so I ask you to send me back the manuscript. Kindest regards

Yours Hans Fitting.

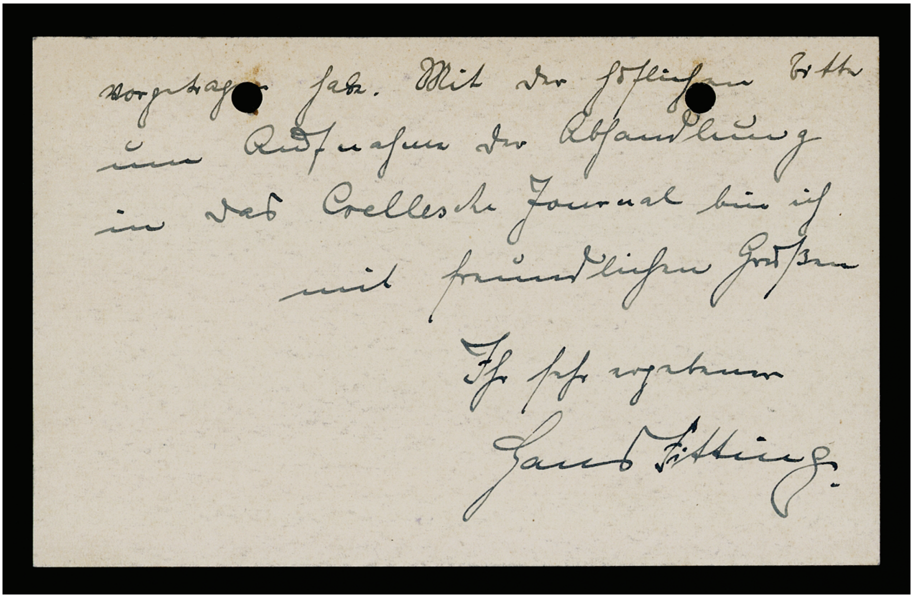
3 Fitting to Hasse: 10 May, 1937


Crelle
Fitting
Königsberg (Pr.), den 10/5.37.

Sehr geehrter Herr Professor!

Ich übersende Ihnen heute endlich das seit langem angekündigte Manuskript meiner Arbeit über „Idealnormen", über die ich Ihnen bereits im vorigen Jahr ausführlich berichtet und über die ich ja auch auf der Tagung in Salzbrunn

412


vorgetragen habe. Mit der höflichen Bitte
um Aufnahme der Abhandlung
in das Crellesche Journal bin ich
mit freundlichen Grüßen
Ihr sehr ergebener
Hans Fitting.

Transcription

Königsberg (Pr.), den 10/5. 1937

Sehr geehrter Herr Professor!

Ich übersende Ihnen heute endlich das seit langem angekündigte Manuskript meiner Arbeit über „Idealnorme", über die ich Inen [sic!] bereits im vorigen Jahr ausführlich berichtet und über die ich ja auch auf der Tagung in Salzbrunn vorgesagen habe. Mit der höflichen Bitte um Aufnahme der Abhandlung in das Crellesche Journal bin ich

mit freundlichen Grüßen

Ihr sehr ergebenen
Hans Fitting.

Translation

Königsberg (Pr.), 10/5/1937

Dearest Herr Professor!

Today I am finally sending you the long announced manuscript of my work about "ideal norms", which I have already described in details to you last year and which I talked about at the conference in Salzbrunn. Kindly requesting the paper to be admitted to Crelle's Journal, I remain

with kind regards

respectfully yours
Hans Fitting.

Transcripted and translated by

M. Brescia, M. Trombetti
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli"
Università degli Studi di Napoli Federico II
Via Cintia, Napoli (Italy)
e-mail: mattia.brescia@unina.it; marco.trombetti@unina.it

4 Fitting's Habilitationsschrift (second part)

Der Normenbegriff für die Ideale eines Ringes beliebiger Struktur.

Von *Hans Fitting* in Königsberg (Pr.).

Einleitung.

In einer früheren Abhandlung [1]) hat der Verfasser folgende Sätze bewiesen:

I. *$\mathfrak{M}$ sei ein Rechtsmodul in bezug auf einen kommutativen Ring $\mathfrak{o}$ mit Einselement, das für $\mathfrak{M}$ ein Einheitsoperator sei. Ferner werde in $\mathfrak{M}$ die Existenz eines aus endlich vielen Elementen bestehenden Erzeugendensystems $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ vorausgesetzt. Unter diesen Bedingungen ist das Ideal des Ringes $\mathfrak{o}$, das von den Determinanten aller der Bedingung*

$$\sum_{\mu=1}^{s} \alpha_\mu a_{\mu\nu} = 0, \quad a_{\mu\nu} \in \mathfrak{o} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s)$$

genügenden, s-reihigen, quadratischen Matrizen $(a_{\mu\nu})$ erzeugt wird, von der speziellen Wahl des Basissystems $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ unabhängig, d. h. in $\mathfrak{M}$ invariant definiert [2]) (DM, § 1); es werde im folgenden mit $\mathfrak{d}(\mathfrak{M})$ bezeichnet und — im Anschluß an Iyanaga [2a]) — das *Ordnungsideal* von $\mathfrak{M}$ genannt.

II. *Zum annullierenden Ideal* [3]) $\mathfrak{a}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{a}$ *des Moduls $\mathfrak{M}$ steht $\mathfrak{d}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{d}$ in der Beziehung $\mathfrak{a}^r \leqq \mathfrak{d} \leqq \mathfrak{a}$* [4]), *falls nur r hinreichend groß* (z. B. nicht kleiner als der Rang r [5]) von $\mathfrak{M}$) *gewählt wird*; $\mathfrak{d}(\mathfrak{M})$ *und* $\mathfrak{a}(\mathfrak{M})$ *sind also immer durch dieselben Primideale teilbar* (DM, § 2, Satz 3).

III. *Das Ordnungsideal $\mathfrak{d}(\mathfrak{M})$ ist durch das Indexideal $\mathfrak{d}(\mathfrak{M}/\mathfrak{U})$, i. a. aber nicht durch das Ordnungsideal $\mathfrak{d}(\mathfrak{M})$ eines Untermoduls $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{M}$ teilbar*:

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{M}) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{d}(\mathfrak{M}/\mathfrak{U})), \ \textit{i. a. aber} \ \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{d}(\mathfrak{U})) \qquad \text{(DM, § 2, Satz 7, 8).}$$

IV. *Bei jeder direkten Summenzerlegung von $\mathfrak{M}$*

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \cdots + \mathfrak{K}_n$$

ist das Ordnungsideal von $\mathfrak{M}$ gleich dem Produkt aus den Ordnungsidealen der Summanden $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$:

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{d}(\mathfrak{K}_1) \cdot \mathfrak{d}(\mathfrak{K}_2) \cdots \mathfrak{d}(\mathfrak{K}_n) \qquad \text{(DM, § 2, Satz 5).}$$

---

[1]) H. Fitting, Die Determinantenideale eines Moduls, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **46** (1936), S. 195—228; diese Arbeit wird mit DM zitiert.

[2]) Ein Beweis des Satzes I findet sich auch schon in der Arbeit von Iyanaga, Zum Beweis des Hauptidealsatzes, Abhandlungen des Hamburger Math. Sem. **10** (1934), S. 355—356.

[2a]) A. a. O. [2]), S. 355.

[3]) Unter dem *annullierenden Ideal* eines Moduls $\mathfrak{M}$ mit dem Operatorenring $\mathfrak{o}$ wird die Gesamtheit aller Elemente a aus $\mathfrak{o}$ verstanden, welche für jedes $\alpha \in \mathfrak{M}$ der Bedingung $\alpha \cdot a = 0$ genügen.

[4]) Die Relation $\mathfrak{d} \leqq \mathfrak{a}$ bringt eine Verallgemeinerung des kleinen Fermatschen Satzes zum Ausdruck, die ebenfalls bereits von Iyanaga, a. a. O. [2]), S. 356, bewiesen wurde.

[5]) *Rang* von $\mathfrak{M}$ ist die kleinste natürliche Zahl, welche angibt, daß in $\mathfrak{M}$ ein aus r, aber kein aus $r - 1$ Elementen bestehendes Erzeugendensystem existiert.

108 *Fitting, Der Normenbegriff für die Ideale eines Ringes beliebiger Struktur.*

V. *Ist* $\mathfrak{o}$ *speziell ein* 5-*Axiomering im Sinne E. Noethers* (*vom Typus der Hauptordnung eines algebraischen Zahlkörpers endlichen Grades*), *so ist das Ordnungsideal* $\mathfrak{d}(\mathfrak{M})$ *immer gleich dem Produkt aus Index- und Ordnungsideal eines Untermoduls* $\mathfrak{U}$ *von* $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{d}(\mathfrak{M}/\mathfrak{U}) \cdot \mathfrak{d}(\mathfrak{U}) \qquad \text{(DM, § 4, Satz 18).}$$

VI. *Im Spezialfall einer* (*additiv geschriebenen*) *gewöhnlichen, endlichen, abelschen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist* $\mathfrak{d}(\mathfrak{G})$ — falls $\mathfrak{G}$ als Rechtsmodul in bezug auf den Ring der ganzrationalen Zahlen aufgefaßt wird — *das von der Ordnung von* $\mathfrak{G}$ *erzeugte Hauptideal* (DM, § 2, Satz 6, S. 204, vgl. auch Iyanaga a. a. O. [2]), S. 356).

Der letzte Satz führt zu einer interessanten Konsequenz: Ist $\mathfrak{O}$ die Hauptordnung eines algebraischen Zahlkörpers endlichen Grades, $\mathfrak{o}$ der Ring der ganzrationalen Zahlen und $\mathfrak{A}$ irgendein Ideal von $\mathfrak{O}$, so ist $\mathfrak{d}(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ — wenn das Restklassensystem $\mathfrak{O}/\mathfrak{A}$ als Rechtsmodul in bezug auf $\mathfrak{o}$ gedeutet wird — nichts anderes als die Norm von $\mathfrak{A}$ in bezug auf $\mathfrak{o}$ (absolute Norm). Diesem Beispiel entsprechend mache ich in dieser Arbeit die Resultate I—VI über das Ordnungsideal $\mathfrak{d}(\mathfrak{M})$ in naheliegender Weise zur Grundlage einer allgemeinen Theorie für die „Normen" der (ein- und zweiseitigen) Ideale eines beliebigen kommutativen oder nichtkommutativen Ringes $\mathfrak{O}$ mit Einselement. Von dem Ring $\mathfrak{o}$, in bezug auf den die Normen gebildet werden sollen, setze ich dabei voraus, daß er das Einselement von $\mathfrak{O}$ umfaßt und im Zentrum von $\mathfrak{O}$ enthalten ist [6]); jedes Rechts- oder Linksideal $\mathfrak{A}$ des Ringes $\mathfrak{O}$ ist dann immer *Rechts*modul in bezug auf $\mathfrak{o}$, den ich mit $\mathfrak{A}_0$ bezeichne. Für das Ideal $\mathfrak{A}$ des Ringes $\mathfrak{O}$ definiere ich die Norm $N\mathfrak{A}$ bezüglich $\mathfrak{o}$ dann und nur dann, wenn im $\mathfrak{o}$-Rechtsmodul $\mathfrak{O}_0/\mathfrak{A}_0$ der Doppelkettensatz gilt [7]); in diesem Fall sei $N\mathfrak{A}$ das Ordnungsideal:

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{O}_0/\mathfrak{A}_0) = N\mathfrak{A},$$

dessen Existenz gesichert ist, da Moduln mit Doppelkettensatz sich immer von endlich vielen Elementen erzeugen lassen. Aufgabe der vorliegenden Abhandlung soll es sein, die Theorie, die sich auf dem eben definierten, allgemeinen Normenbegriff aufbaut, im einzelnen zu entwickeln und neben der Herleitung neuer Resultate die Verbindung mit den wichtigsten, in der Literatur vorkommenden Normensätzen und -definitionen herzustellen.

Von Bedeutung ist der Normenbegriff namentlich in der hyperkomplexen Arithmetik, deren Betrachtungen sich hauptsächlich auf die Ordnungen einer einfachen Algebra A beziehen, deren Grundkörper P der Quotientenkörper eines Noetherschen 5-Axiomeringes $\mathfrak{r}$ ist. Bedeutet $\mathfrak{O}$ irgendeine (nicht notwendig maximale) Ordnung von A und $\mathfrak{o}$ einen $\mathfrak{r}$ umfassenden Teilring des Zentrums von $\mathfrak{O}$, so ist die Norm für alle *nicht singulären*, d. h. für alle diejenigen Ideale definiert, die wenigstens einen Nichtnullteiler enthalten; die Normenbildung ist also gerade bei allen Idealen möglich, die in der hyperkomplexen Arithmetik eine Rolle spielen, in der man ja die (aus lauter Nullteilern bestehenden) singulären Ideale (z. B. das Nullideal) auszuschließen pflegt.

Den interessantesten Spezialfall erhält man natürlich, wenn man $\mathfrak{O}$ als Maximalordnung von A, $\mathfrak{o}$ als Hauptordnung eines P umfassenden Teilkörpers K des Zentrums Z von A voraussetzt:

$$\mathsf{P} \leqq \mathsf{K} \leqq \mathsf{Z} \leqq A,$$

---

[6]) An sich würde es genügen, $\mathfrak{o}$ als einen das Einselement von $\mathfrak{O}$ umfassenden, kommutativen Teilring von $\mathfrak{O}$ vorauszusetzen; da aber unter dieser allgemeinen Voraussetzung die Theorie etwas schwerfällig wird, beschränke ich mich auf den im Text angegebenen Spezialfall.

[7]) Auch an dieser Stelle wäre es wieder möglich, die scharfe Voraussetzung des Doppelkettensatzes durch eine schwächere Forderung, etwa Existenz einer aus endlich vielen Elementen bestehenden Basis im Modul $\mathfrak{O}_0/\mathfrak{A}_0$ zu ersetzen. Von dieser Verallgemeinerung gilt aber dieselbe Bemerkung wie die in Fußnote 6 gemachte, weshalb ich auf eine Weiterverfolgung des allgemeinen Falles von vornherein verzichte.

wobei man, um über die Existenz maximaler Ordnungen in A bzw. K Gewißheit zu haben, sich auf solche einfachen Algebren A über P beschränken wird, bei denen das Zentrum Z über P separabel, d. h. von erster Art ist. In diesem Falle werde ich neben $\mathfrak{O}$ gleichzeitig alle Maximalordnungen $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{O}'$, $\mathfrak{O}''$, ... von A betrachten. Mein erstes Ziel ist ein Beweis des bekannten Normenproduktsatzes (die Norm eines eigentlichen Idealproduktes ist das Produkt aus den Normen der einzelnen Faktoren), der sich unter Umgehung der Schwierigkeiten, die bei der üblichen Begründungsweise auftreten, wenn $\mathfrak{o}$ kein Hauptidealring ist, und unter Vermeidung des Umwegs über die $\mathfrak{p}$-adik direkt aus gruppentheoretischen Struktursätzen ableiten läßt, die für die Restklassenmoduln gewisser Ideale der Maximalordnungen von A gelten [8]. Anschließend beweise ich den Satz, daß zwei Ideale $\mathfrak{A}_{ij}$ und $\mathfrak{B}_{kl}$ stets dann und nur dann als $\mathfrak{o}$-Moduln isomorph sind, falls ihre Normen bezüglich $\mathfrak{o}$ im gewöhnlichen Sinne der algebraischen Zahlentheorie äquivalent sind, woraus u. a. folgt, daß z. B. alle Maximalordnungen von A als $\mathfrak{o}$-Moduln, insbesondere auch als $\mathfrak{z}$-Moduln isomorph sind, wobei $\mathfrak{z}$ die Hauptordnung des Zentrums Z von A bedeutet. Das letzte Resultat ist insofern interessant, als es — wie ich zum Schluß noch zeigen werde — in A die Einführung eines neuen Idealklassenbegriffs ermöglicht, derart, daß die Idealklassen einerseits als natürliche Verallgemeinerung der in der algebraischen Zahlentheorie definierten Idealklassen angesehen werden können, anderseits bei multiplikativer Verknüpfung eine gewöhnliche abelsche Gruppe bilden, die im Spezialfall rationaler Algebren sogar endlich ist.

§ 1. Normentheorie in Ringen allgemeiner Struktur.

$\mathfrak{O}$ sei ein beliebiger kommutativer oder nichtkommutativer Ring mit Einselement 1 und $\mathfrak{o}$ ein Teilring des Zentrums von $\mathfrak{O}$, der das Einselement von $\mathfrak{O}$ umfaßt. Die Elemente eines beliebigen Rechts- oder Linksideals $\mathfrak{A}$ des Ringes $\mathfrak{O}$ bilden dann offenbar stets einen *Rechts*modul in bezug auf $\mathfrak{o}$, den ich mit $\mathfrak{A}_0$ bezeichne. Für den Restklassenmodul $\mathfrak{O}_0/\mathfrak{A}_0$ schreibe ich kurz $(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_0$.

Für ein Rechts- oder Linksideal $\mathfrak{A}$ des Ringes $\mathfrak{O}$ führe ich eine N o r m *bezüglich $\mathfrak{o}$, in Zeichen $N_{\mathfrak{O}/\mathfrak{o}}(\mathfrak{A}) = N\mathfrak{A}$ [9]) ein, wenn im Modul $(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_0$ der Doppelkettensatz gilt; in diesem Fall sei $N\mathfrak{A}$ das Ordnungsideal des Moduls $(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_0$, d. h.*

$$N_{\mathfrak{O}/\mathfrak{o}}(\mathfrak{A}) = N\mathfrak{A} = \mathfrak{d}\{(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_0\},$$

während $N\mathfrak{A}$ in allen übrigen Fällen gar nicht definiert wird. Wenn daher im folgenden von der Norm eines Ideals $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{O}$ die Rede ist, so wird dabei immer stillschweigend vorausgesetzt, daß die genannte Endlichkeitsbedingung — Doppelkettensatz in $(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_0$ — erfüllt ist, was ich nicht jedesmal ausdrücklich hervorheben will.

Satz 1. *Aus* $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{B}$ *folgt* $N\mathfrak{A} \leqq N\mathfrak{B}$.

Beweis. Es ist

$$(\mathfrak{O}_0/\mathfrak{A}_0)/(\mathfrak{B}_0/\mathfrak{A}_0) \cong (\mathfrak{O}/\mathfrak{B})_0$$

und daher Satz 1 ein Spezialfall des Satzes III (Einleitung).

Satz 2. *Es gilt*

$$(\mathfrak{A} \frown \mathfrak{o})^r \leqq N\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{A} \frown \mathfrak{o},$$

wenn r hinreichend groß (z. B. nicht kleiner als die Rangzahl des Moduls $(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_0$ (siehe Fußnote 5) *gewählt wird. $N\mathfrak{A}$ ist also durch dieselben Primideale teilbar wie das „Verengungsideal“* (der Durchschnitt) $\mathfrak{A} \frown \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$.

---

[8]) In dem Buche Deuring, Algebren (Ergebnisse d. Math. 4 (1935), S. 79ff.) wird ein ähnlicher Beweis gegeben, der aber auf einer anderen, mit der meinigen im betrachteten Spezialfall gleichwertigen, Normendefinition beruht.

[9]) Ich schreibe einfach $N\mathfrak{A}$, falls über die Bezugsringe $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{o}$ kein Zweifel besteht.

Beweis. Folgt aus Satz II (Einleitung); denn $\mathfrak{A} \frown \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$ ist das annullierende Ideal des Moduls $(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_0$.

Satz 3. *Die Norm eines Primideals* $\mathfrak{P}$ [10]) *ist*

$$N\mathfrak{P} = (\mathfrak{P} \frown \mathfrak{o})^f ,$$

wo f *den Grad von* $\mathfrak{P}$ *bezüglich* $\mathfrak{o}$, d. h. den Rang des Moduls $(\mathfrak{O}/\mathfrak{P})_0$, *bezeichnet.*

Beweis. Zunächst ist $\mathfrak{P} \frown \mathfrak{o} = \mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}$, was nach Einführung des Eigenrings [10]) $\mathfrak{O}^*$ von $\mathfrak{P}$ leicht bestätigt werden kann; denn ist ein Produkt von Idealen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ des Ringes $\mathfrak{o}$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar, so gilt

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{O}^* \cdots \mathfrak{a}_k\mathfrak{O}^* \leqq (\mathfrak{P} \frown \mathfrak{o})\,\mathfrak{O}^* \leqq \mathfrak{P} ,$$

so daß wenigstens einer der Faktoren $\mathfrak{a}_1\mathfrak{O}^*, \ldots, \mathfrak{a}_k\mathfrak{O}^*$, etwa $\mathfrak{a}_\varkappa\mathfrak{O}^*$, durch $\mathfrak{P}$ und damit $\mathfrak{a}_\varkappa$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein muß.

Nun ist $\mathfrak{p}$ das annullierende Ideal des Moduls $(\mathfrak{O}/\mathfrak{P})_0$ und in $(\mathfrak{O}/\mathfrak{P})_0$, also auch mod $\mathfrak{p}$, der Doppelkettensatz erfüllt (vgl. DM, § 5, Absatz 2, S. 225). Infolgedessen ist $\mathfrak{p}$ sogar ein teilerloses Ideal und der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ein Körper.

Da $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \frown \mathfrak{o}$ den Modul $(\mathfrak{O}/\mathfrak{P})_0$ annulliert, kann $(\mathfrak{O}/\mathfrak{P})_0$ auch als Modul in bezug auf den Restklassenkörper $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ aufgefaßt werden. Es zeigt sich dann, daß $(\mathfrak{O}/\mathfrak{P})_0$ in die direkte Summe von genau f einfachen Untermoduln zerfällt, die alle mit $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ isomorph sind. Wegen $\mathfrak{d}(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ folgt hieraus nach Satz IV (Einleitung)

$$N\mathfrak{P} = \mathfrak{d}\{(\mathfrak{O}/\mathfrak{P})_0\} = \mathfrak{p}^f .$$

Satz 4. *Bei einem Primärideal* $\mathfrak{Q}$ [10]) *sind Norm* $N\mathfrak{Q}$ *und Verengungsideal* $\mathfrak{Q} \frown \mathfrak{o}$ *primäre (sogar einartige) Ideale, die* — nach Satz 2 — *zum selben Primideal* $\mathfrak{p}$ *gehören; dieses* $\mathfrak{p}$ *ist das Verengungsideal des zu* $\mathfrak{Q}$ *gehörigen Primideals* [10]) $\mathfrak{P}^*$ *in* $\mathfrak{o}$, *d. h.* $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^* \frown \mathfrak{o}$.

Beweis. Ich setze $\mathfrak{Q}$ als Linksideal voraus, was natürlich keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Für zwei Elemente a und b aus $\mathfrak{o}$ sei $a \cdot b \equiv 0$, aber $a \not\equiv 0$ (mod $\mathfrak{Q} \frown \mathfrak{o}$). Dann ist, falls mit $\mathfrak{O}^*$ der Eigenring [10]) von $\mathfrak{Q}$ bezeichnet wird,

$$a\mathfrak{O}^* \cdot b\mathfrak{O}^* \leqq (\mathfrak{Q} \frown \mathfrak{o})\,\mathfrak{O}^* \leqq \mathfrak{Q}, \qquad a\mathfrak{O}^* \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{Q}) .$$

Nun sollte $\mathfrak{Q}$ primär sein; mithin ist jedes Element aus $b\mathfrak{O}^*$ mod $\mathfrak{Q}$ und daher b mod $\mathfrak{Q} \frown \mathfrak{o}$ nilpotent. Wir finden also: 1) Aus $a \in \mathfrak{o}$, $b \in \mathfrak{o}$ und $a \cdot b \equiv 0$, $a \not\equiv 0$ (mod $\mathfrak{Q} \frown \mathfrak{o}$) folgt $b^\varrho \equiv 0$ (mod $\mathfrak{Q} \frown \mathfrak{o}$) für hinreichend großes ϱ. 2) Jedes Element p^* aus $\mathfrak{P}^* \frown \mathfrak{o}$ ist mod $\mathfrak{Q} \frown \mathfrak{o}$ nilpotent. 3) $\mathfrak{Q} \frown \mathfrak{o}$ ist durch $\mathfrak{P}^* \frown \mathfrak{o}$ teilbar. Durch 1), 2) und 3) wird $\mathfrak{Q} \frown \mathfrak{o}$ bekanntlich als primäres Ideal und $\mathfrak{P}^* \frown \mathfrak{o}$ als das zu $\mathfrak{Q} \frown \mathfrak{o}$ gehörige Primideal charakterisiert. Darüber hinaus ist aber $\mathfrak{Q} \frown \mathfrak{o}$ sogar ein einartiges Ideal, da $\mathfrak{Q} \frown \mathfrak{o}$ das annullierende Ideal von $(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q})_0$ ist und in $(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q})_0$, also auch mod $\mathfrak{Q} \frown \mathfrak{o}$ der Doppelkettensatz gilt (vgl. DM, § 5, Absatz 2, S. 225). Nach Satz 2 muß daher mit $\mathfrak{Q} \frown \mathfrak{o}$ auch $N\mathfrak{Q}$ ein zum Primideal $\mathfrak{P}^* \frown \mathfrak{o}$ gehöriges (einartiges) Primärideal sein.

Satz 5. *Ist ein Ideal* $\mathfrak{A}$ *des Ringes* $\mathfrak{O}$ *direkter Durchschnitt* [10a]) *der Ideale* $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_k$ *von* $\mathfrak{O}$, *so gilt:*

$$N\mathfrak{A} = N\mathfrak{B}_1 \cdots N\mathfrak{B}_k .$$

Beweis. Man setze $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_1 \frown \cdots \frown \mathfrak{B}_{i-1} \frown \mathfrak{B}_{i+1} \frown \cdots \frown \mathfrak{B}_k$. Nach bekannten Sätzen zerfällt dann $(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_0$ in die direkte Summe der k Moduln $(\mathfrak{C}_i)_0/(\mathfrak{A})_0$ $(i = 1, \ldots k)$; außerdem ist

$$(\mathfrak{C}_i)_0/\mathfrak{A}_0 \cong (\mathfrak{O}/\mathfrak{B}_i)_0 .$$

[10]) Definition siehe: H. Fitting, Primärkomponentenzerlegung in nichtkommutativen Ringen, Math. Ann. **111** (1935), S. 19—41, insbesondere 21—23.

[10a]) Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Ideale $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_k$ heißt *direkter Durchschnitt*, wenn jedes $\mathfrak{B}_i$ zum kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der übrigen teilerfremd ist.

Hieraus folgt die Behauptung nach Satz IV (Einleitung).

Ein Ideal $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{O}$, für das eine Norm bezüglich $\mathfrak{o}$ definiert ist, läßt sich immer (meist sogar auf mannigfache Art) *als direkter Durchschnitt primärer Ideale darstellen*, weil ja in $(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_0$, um so mehr für die Oberideale von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{O}$, der Doppelkettensatz gilt (vgl. a. a. O. [10]), Satz 5a). Nach Satz 5 ergibt sich hieraus

Satz 6. *Bei jeder Darstellung des Ideals $\mathfrak{A}$ als direkter Durchschnitt von Primäridealen $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_k$ wird*

$$N\mathfrak{A} = N\mathfrak{Q}_1 \cdots N\mathfrak{Q}_k.$$

$N\mathfrak{A}$ ist also stets als Produkt der Normen primärer Ideale darstellbar. Ist $\mathfrak{O}$ kommutativ, so ist insbesondere $N\mathfrak{A} = N\mathfrak{Q}_1 \cdots N\mathfrak{Q}_k$, wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{Q}_1 \cdots \mathfrak{Q}_k$ die eindeutig bestimmte Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in das Produkt paarweise teilerfremder Primärideale bedeutet [11]).

Zur Vorbereitung des Satzes 7 schalte ich eine Zwischenbetrachtung ein:

Bedeutet M irgendeine r-reihige und s-spaltige Matrix, deren Koeffizienten dem Ring $\mathfrak{o}$ entnommen sind, so ist die Menge aller Matrizenprodukte

$$\begin{array}{c}{\scriptstyle s}\\ {\scriptstyle r}\boxed{M}\end{array} \cdot \begin{array}{c}{\scriptstyle r}\\ \boxed{X}{\scriptstyle s}\end{array} = \begin{array}{c}{\scriptstyle r}\\ \boxed{Z}{\scriptstyle r}\end{array},$$

in denen der rechte Faktor X sämtliche s-reihigen und r-spaltigen Matrizen durchläuft, die sich aus den Elementen von $\mathfrak{o}$ bilden lassen, ein Rechtsideal $\mathfrak{o}_r$ aller r-reihigen, quadratischen Matrizen mit Koeffizienten aus $\mathfrak{o}$; ich nenne es *das von M erzeugte Rechtsideal.*

Im allgemeinen ist natürlich nicht jedes Rechtsideal $|\mathfrak{a}_r)$ von $\mathfrak{o}_r$ im eben beschriebenen Sinne von einer Matrix erzeugbar; dies ist aber jedenfalls dann immer der Fall, wenn in $\mathfrak{o}$ die Teilerketten-(Maximal-)Bedingung erfüllt ist. Um dies zu beweisen, werde mit $|\mathfrak{a}_r)'$ die Menge aller r-zeiligen, *ein*spaltigen Matrizen bezeichnet, die in den zu $|\mathfrak{a}_r)$ gehörigen Matrizen als Spalten vorkommen, und mit $\mathfrak{o}_r'$ die Menge aller r-zeiligen, *ein*spaltigen Matrizen, die sich überhaupt mit Koeffizienten aus $\mathfrak{o}$ bilden lassen. $|\mathfrak{a}_r)'$ und $\mathfrak{o}_r'$ sind offenbar Rechtsmoduln in bezug auf $\mathfrak{o}$, von denen der letztere sogar eine aus endlich vielen Elementen bestehende Basis besitzt, nämlich $(E_1, \ldots, E_r)$, wo E_i die spezielle r-zeilige, einspaltige Matrix bedeutet, in der in der i-ten Zeile die Eins, sonst überall die Null des Ringes $\mathfrak{o}$ steht. Hieraus folgt aber, daß jeder Untermodul von $\mathfrak{o}_r'$, insbesondere auch $|\mathfrak{a}_r)'$, ebenfalls ein Erzeugendensystem besitzen muß, das aus endlich vielen Elementen besteht, da in $\mathfrak{o}$ der Teilerkettensatz vorausgesetzt wurde. Ist $(S_1, \ldots, S_t)$ ein solches Basissystem von $|\mathfrak{a}_r)'$, so wird das Ideal $|\mathfrak{a}_r)$ offenbar von der aus den Spalten $S_1, \ldots, S_t$ zusammengesetzten Matrix erzeugt.

Satz 7. *Es werde in $\mathfrak{o}$ die Gültigkeit des Teilerkettensatzes und im $\mathfrak{o}$-Modul $\mathfrak{O}_0$ die Existenz eines Erzeugendensystems $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$ vorausgesetzt, das aus endlich vielen Elementen besteht. Unter dieser Bedingung muß bekanntlich auch jedes Ideal $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{O}$ — als $\mathfrak{o}$-Modul gedeutet — ein aus endlich vielen Elementen bestehendes Erzeugendensystem $(\mathsf{A}_1 \ldots, \mathsf{A}_p)$ besitzen. Ist nun U eine Übergangsmatrix von $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$ zu $(\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_p)$* [so daß also $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r) \cdot U = (\mathsf{A}_1 \ldots, \mathsf{A}_p)$ gilt] *und V eine erzeugende Matrix des annullierenden Ideals von $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$* [12]); *so ist $N\mathfrak{A}$ der* (in $\mathfrak{o}$ gebildete) *größte gemein-*

[11]) H. Grell, Zur Theorie der Ordnungen in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Ann. **97** (1927), S. 524—558, insbesondere S. 542.

[12]) Das annullierende Ideal des Erzeugendensystems $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$ von $\mathfrak{O}_0$ ist die Menge $|\mathfrak{a}_r)$ aller r-reihigen, quadratischen Matrizen $(a_{\mu\nu})$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{o}$, die für jedes $\nu = 1, \ldots, r$ der Bedingung $\Sigma\,\Omega_\mu\, a_{\mu\nu} = 0$ genügen. Offenbar ist $|\mathfrak{a}_r)$ ein Rechtsideal des Ringes $\mathfrak{o}_r$ aller r-reihigen, quadratischen Matrizen, die sich aus den Elementen von $\mathfrak{o}$ bilden lassen. Die Forderung, daß $V = (v_{ij})$ eine erzeugende Matrix von $|\mathfrak{a}_r)$ sein soll, besagt also auf Grund der dem Satz 7 vorausgeschickten Definition: 1. daß die Relationen $R_1 \equiv \Sigma\,\Omega_i\, v_{i1}, \ldots, R_q \equiv \Sigma\,\Omega_i\, v_{iq} = 0$ gelten,

schaftliche Idealteiler $\mathfrak{c}$ *der Determinanten aller Matrizen, die aus der Matrix*

$$P = \underbrace{\overbrace{\boxed{U}\boxed{V}}^{p+q=s}}_{s} r$$

durch Streichung von $s - r$ *beliebigen Spalten entstehen; im Fall* $r > s$ *ist* $N\mathfrak{A} = 0$.

Beweis. Der Fall $s < r$ läßt sich auf den Fall $s \geqq r$ zurückführen, indem jede Reihe von P mit $r - s$ Nullen aufgefüllt wird; es genügt daher, den Fall $s \geqq r$ zu betrachten. Man erhält $\mathfrak{d}\{(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_0\} = N\mathfrak{A}$, indem man alle r-reihigen, quadratischen Matrizen $R = (a_{\mu\nu})$ aufsucht, die der Bedingung

$$(1) \qquad \begin{cases} \sum_{\mu=1}^{r} \Omega_\mu a_{\mu\nu} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{A}} & (\nu = 1, 2, \ldots, r) \\ a_{\mu\nu} \in \mathfrak{o} \end{cases}$$

genügen und das von den Determinanten $|R|$ erzeugte Ideal in $\mathfrak{o}$ bildet.

Ist $S = (b_{\mu\nu})$ irgendeine Matrix, die von P nach Fortstreichung von $s - r$ beliebigen Spalten übrigbleibt, so ist für S immer die Bedingung (1) erfüllt; infolgedessen ist $|S| \in N\mathfrak{A}$, d. h.

$$(2) \qquad \mathfrak{c} \leqq N\mathfrak{A}.$$

$R = (a_{\mu\nu})$ sei eine beliebige r-reihige, quadratische Matrix, die der Bedingung (1) genügt. Ich setze

$$(1a) \qquad (\Omega_1, \ldots, \Omega_r) \cdot R = (\mathsf{A}_1^*, \ldots, \mathsf{A}_r^*).$$

Die Elemente A_i^* sind wegen (1) in $\mathfrak{A}$ enthalten. Da $(\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_p)$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{A}_0$ sein sollte, gibt es eine Matrix W mit Koeffizienten aus $\mathfrak{o}$, für die

$$(3) \qquad (\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_p) \cdot W = (\mathsf{A}_1^*, \ldots, \mathsf{A}_r^*)$$

wird. Weiter ist nach Definition von U

$$(4) \qquad (\Omega_1, \ldots, \Omega_r) \cdot U = (\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_p).$$

Aus (1a), (3) und (4) folgt, daß $R - UW$ zum annullierenden Ideal der Basis $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$ von $\mathfrak{O}_0$ gehört. Daher gibt es eine Matrix X mit Koeffizienten aus $\mathfrak{o}$ derart, daß

$$VX = R - UW, \quad R = VX + UW$$

gilt. Bilde ich die Matrix $Q = \begin{pmatrix} W \\ X \end{pmatrix}$, so bringt die Gleichung $UW + VX = R$ das Bestehen der Matrixgleichung $PQ = R$ zum Ausdruck; diese besagt aber nach einem bekannten Satz der Determinantentheorie, daß $|R|$ in dem Ideal $\mathfrak{c}$ enthalten ist. Es ist also $N\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{c}$, was mit (2) zusammen $N\mathfrak{A} = \mathfrak{c}$ ergibt.

Es sei jetzt $\mathfrak{o}$ *Hauptidealring,* $\mathfrak{O}_0$ *wie in Satz 7 von endlich vielen Elementen erzeugbar und außerdem „rein-unendlich", d. h. kein Element* $a \in \mathfrak{o}$ *Nullteiler des Ringes* $\mathfrak{O}$. Dann können in Satz 7 die Systeme $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$ und $(\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_p)$ bekanntlich stets so gewählt werden, daß $V = 0$ und $r = p$ ausfällt und daher $N\mathfrak{A}$ mit dem Hauptideal übereinstimmt, das von der Determinante der (jetzt quadratischen!) Übergangsmatrix U von $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$ zu $(\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_r)$ erzeugt wird. *In diesem Spezialfall erweist sich also die Normendefinition der vorliegenden Arbeit mit der üblichen als äquivalent. Das gleiche gilt, wenn* $\mathfrak{o}$ *der Ring der ganzrationalen Zahlen ist, sogar dann, wenn sich* $\mathfrak{O}_0$ *nicht von endlich*

2. daß $R_1 = 0, \ldots, R_q = 0$ ein zu dem Erzeugendensystem $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$ gehöriges System *definierender* Relationen für den Modul $\mathfrak{O}_0$ bilden, aus denen jede weitere Relation $R \equiv \Sigma\,\Omega_i v_i = 0$ als Folgerelation, d. h. durch rechtsseitige Linearkombination mit Koeffizienten c_j aus $\mathfrak{o}$ hervorgeht: $R \equiv R_1 c_1 + R_2 c_2 + \cdots + R_q c_q = 0$. Daß zu $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$ ein System aus endlich vielen definierenden Relationen existiert, ist — wie in der dem Satz 7 vorausgehenden Betrachtung gezeigt wurde — eine Folge des in $\mathfrak{o}$ vorausgesetzten Teilerkettensatzes.

vielen Elementen erzeugen läßt und wenn in $\mathfrak{o}$ Zahlen existieren, die in $\mathfrak{O}$ Nullteiler sind. Unter den genannten Voraussetzungen über $\mathfrak{o}$ ist nämlich $(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_0$ immer eine *endliche*, gewöhnliche, abelsche Gruppe, da in $(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_0$ der Doppelkettensatz gelten soll, und $\mathfrak{d}\{(\mathfrak{O}/\mathfrak{A})_0\} = N\mathfrak{A}$ nach Satz VI (Einleitung) dasjenige Hauptideal von $\mathfrak{o}$, das von der Ordnung dieser Gruppe, d. h. von der Anzahl der Restklassen, in die $\mathfrak{O}$ mod $\mathfrak{A}$ zerfällt, erzeugt wird.

§ 2. Erster Spezialfall.

$\mathfrak{o}$ sei von nun an immer ein Ring vom Typus der Hauptordnung eines algebraischen Zahlkörpers endlichen Grades, d. h. ein 5-Axiomering im Sinne von E. Noether. Über den Ring $\mathfrak{O}$ werden darüber hinaus in diesem Paragraphen noch keine weiteren einschränkenden Voraussetzungen gemacht.

Satz 8. *Bei jeder Darstellung des Ideals $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{O}$ als direkter Durchschnitt von Primäridealen $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_k$* (vgl. hierzu die Bemerkung vor Satz 6) *wird*

$$N\mathfrak{A} = (\mathfrak{P}_1^* \frown \mathfrak{o})^{l_1} \cdots (\mathfrak{P}_k^* \frown \mathfrak{o})^{l_k},$$

falls $\mathfrak{P}_\varkappa^*$ das zu $\mathfrak{Q}_\varkappa$ gehörige Primideal und $l_\varkappa$ die Kompositionsreihenlänge von $(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_\varkappa)_0$ bezeichnet.

Beweis. Da nach Satz 6 $N\mathfrak{A} = N\mathfrak{Q}_1 \cdots N\mathfrak{Q}_k$ ist, kommt es nur darauf an, zu zeigen, daß $N\mathfrak{Q}_\varkappa = (\mathfrak{P}_\varkappa^* \frown \mathfrak{o})^{l_\varkappa}$ gilt. Dies ergibt sich aber sofort, wenn man auf die Glieder $\mathfrak{U}_\lambda$ einer Kompositionsreihe

$$\mathfrak{U}_0 < \mathfrak{U}_1 < \cdots < \mathfrak{U}_\lambda < \cdots < \mathfrak{U}_{l_\varkappa} = (\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_\varkappa)_0$$

des Moduls $(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_\varkappa)_0$ Satz V der Einleitung anwendet. Man findet dann

$$N\mathfrak{Q}_\varkappa = \mathfrak{d}\{(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_\varkappa)_0\} = \mathfrak{d}(\mathfrak{U}_1/\mathfrak{U}_0) \cdot \mathfrak{d}(\mathfrak{U}_2/\mathfrak{U}_1) \cdots \mathfrak{d}(\mathfrak{U}_{l_\varkappa}/\mathfrak{U}_{l_\varkappa-1}).$$

Nun ist das annullierende Ideal $\mathfrak{Q}_\varkappa \frown \mathfrak{o}$ von $(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_\varkappa)_0$ nach Satz 4 ein Primärideal und $\mathfrak{P}_\varkappa^* \frown \mathfrak{o} = \mathfrak{p}_\varkappa$ das zugehörige Primideal. Daher sind die einfachen Restklassenmoduln $\mathfrak{U}_{\lambda+1}/\mathfrak{U}_\lambda$ alle mit $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_\varkappa$ isomorph. Hieraus folgt wegen $\mathfrak{d}(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_\varkappa) = \mathfrak{p}_\varkappa$

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{U}_{\lambda+1}/\mathfrak{U}_\lambda) = \mathfrak{p}_\varkappa, \quad \text{also} \quad N\mathfrak{Q}_\varkappa = \mathfrak{p}_\varkappa^{l_\varkappa}.$$

Satz 9. *Ist $\mathfrak{O}$ kommutativ, so gilt*

$$N\mathfrak{A} = (N\mathfrak{P}_1)^{e_1} \cdots (N\mathfrak{P}_k)^{e_k} = (\mathfrak{P}_1 \frown \mathfrak{o})^{f_1 e_1} \cdots (\mathfrak{P}_k \frown \mathfrak{o})^{f_k e_k}$$

wenn — unter $\mathfrak{A} = \mathfrak{Q}_1 \cdots \mathfrak{Q}_k$ die eindeutig bestimmte Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in das Produkt paarweise teilerfremder Primärideale verstanden — $\mathfrak{P}_\varkappa$ das zu $\mathfrak{Q}_\varkappa$ gehörige Primideal, $e_\varkappa$ die Kompositionsreihenlänge des $\mathfrak{O}$-Moduls $\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_\varkappa$ und $f_\varkappa$ den Grad des Primideals $\mathfrak{P}_\varkappa$ bezüglich $\mathfrak{o}$ (d. h. den Rang von $(\mathfrak{O}/\mathfrak{P}_\varkappa)_0$) *bedeutet* [13]).

Beweis. Die einfachen Restklassenmoduln $\mathfrak{B}_{\lambda+1}/\mathfrak{B}_\lambda$, die von je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern $\mathfrak{B}_\lambda$, $\mathfrak{B}_{\lambda+1}$ einer Kompositionsreihe des $\mathfrak{O}$-Moduls $\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_\varkappa$ erzeugt werden, sind alle mit $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}_\varkappa$ isomorph. $(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_\varkappa)_0$ hat daher die Länge $l_\varkappa = e_\varkappa f_\varkappa$; denn die Länge von $(\mathfrak{O}/\mathfrak{P}_\varkappa)_0$ ist $f_\varkappa$, was wir schon beim Beweis des Satzes 3 feststellten. Nach Satz 8 wird also

$$N\mathfrak{A} = (\mathfrak{P}_1 \frown \mathfrak{o})^{e_1 f_1} \cdots (\mathfrak{P}_k \frown \mathfrak{o})^{e_k f_k},$$

woraus nach Satz 3 schließlich

$$N\mathfrak{A} = (N\mathfrak{P}_1)^{e_1} \cdots (N\mathfrak{P}_k)^{e_k}$$

hervorgeht.

[13]) Vgl. H. Grell, a. a. O. [11]).

Satz 10. *$\mathfrak{o}'$ sei ein $\mathfrak{o}$ umfassender 5-Axiomering im Sinne von E. Noether, der im Zentrum von $\mathfrak{O}$ enthalten ist; es gilt dann*

$$N_{\mathfrak{O}/\mathfrak{o}}(\mathfrak{A}) = N_{\mathfrak{o}'/\mathfrak{o}}(N_{\mathfrak{O}/\mathfrak{o}'}(\mathfrak{A}))$$

für alle Ideale des Ringes $\mathfrak{O}$, für die $N_{\mathfrak{O}/\mathfrak{o}}$ definiert ist.

$\mathfrak{O}$ braucht in diesem Satz nicht kommutativ zu sein.

Beweis. Es sei

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_k$$

irgendeine Darstellung von $\mathfrak{A}$ als direkter Durchschnitt primärer Ideale. Mit $\mathfrak{P}_i^*$ werde das zu $\mathfrak{Q}_i$ gehörige Primideal bezeichnet. Zur Abkürzung werde $\mathfrak{P}_i^* \cap \mathfrak{o}' = \mathfrak{p}_i'$ und $\mathfrak{P}_i^* \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{p}_i$ gesetzt. Die Numerierung der $\mathfrak{Q}_i$ denken wir uns so vorgenommen, daß

$$\underbrace{\mathfrak{p}_1' = \mathfrak{p}_2' = \cdots = \mathfrak{p}_\alpha'}, \underbrace{\mathfrak{p}_{\alpha+1}' = \cdots = \mathfrak{p}_\beta'}, \ldots, \underbrace{\mathfrak{p}_{\mu+1}' = \cdots = \mathfrak{p}_\nu'}$$

ausfällt, während $\mathfrak{p}_\alpha', \mathfrak{p}_\beta', \ldots, \mathfrak{p}_\mu', \mathfrak{p}_\nu'$ voneinander verschieden sind.

Bedeutet l_i (bzw. l_i') die Länge des Moduls $(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_i)_\mathfrak{o}$ (bzw. $(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_i)_{\mathfrak{o}'}$), so wird nach Satz 8:

$$(1) \qquad N_{\mathfrak{O}/\mathfrak{o}'}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{p}_1'^{l_1'} \cdots \mathfrak{p}_k'^{l_k'} = \mathfrak{p}_\alpha'^{l_1'+\cdots+l_\alpha'} \cdots \mathfrak{p}_\nu'^{l_{\mu+1}'+\cdots+l_\nu'},$$

$$(2) \qquad N_{\mathfrak{O}/\mathfrak{o}}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{p}_1^{l_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{l_k} = \mathfrak{p}_\alpha^{l_1+\cdots+l_\alpha} \cdots \mathfrak{p}_\nu^{l_{\mu+1}+\cdots+l_\nu}.$$

Die einfachen Restklassenmoduln, die von aufeinanderfolgenden Gliedern einer Kompositionsreihe des Moduls $(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_i)_{\mathfrak{o}'}$ erzeugt werden, sind offenbar alle mit $\mathfrak{o}'/\mathfrak{p}_i'$ isomorph. $(\mathfrak{O}/\mathfrak{Q}_i)_\mathfrak{o}$ hat daher die Länge $l_i = l_i' f_i$, falls die Länge von $(\mathfrak{o}'/\mathfrak{p}_i')_\mathfrak{o}$, d. h. der Grad von $\mathfrak{p}_i'$ bezüglich $\mathfrak{o}$, mit f_i bezeichnet wird. Es gilt also

$$(3) \qquad N_{\mathfrak{O}/\mathfrak{o}}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{p}_\alpha^{(l_1'+\cdots+l_\alpha')f_\alpha} \cdots \mathfrak{p}_\nu^{(l_{\mu+1}'+\cdots+l_\nu')f_\nu}.$$

Nach bekannten Sätzen über Ringe vom Typus der Hauptordnung eines algebraischen Zahlkörpers endlichen Grades haben die Moduln

$$\mathfrak{o}'/\mathfrak{p}_\alpha'^{l_1'+\cdots+l_\alpha'}, \ldots, \mathfrak{o}'/\mathfrak{p}_\nu'^{l_{\mu+1}'+\cdots+l_\nu'}$$

resp. die Längen $(l_1' + \cdots + l_\alpha'), \ldots, (l_{\mu+1}' + \cdots + l_\nu')$. Nach Satz 9 wird daher wegen $\mathfrak{p}_i = (\mathfrak{P}_i^* \cap \mathfrak{o}') \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{p}_i' \cap \mathfrak{o}$

$$(4) \qquad N_{\mathfrak{o}'/\mathfrak{o}}\{\mathfrak{p}_\alpha'^{l_1'+\cdots+l_\alpha'} \cdots \mathfrak{p}_\nu'^{l_{\mu+1}'+\cdots+l_\nu'}\} = \mathfrak{p}_\alpha^{(l_1'+\cdots+l_\alpha')f_\alpha} \cdots \mathfrak{p}_\nu^{(l_{\mu+1}'+\cdots+l_\nu')f_\nu}.$$

Aus (1), (3) und (4) ergibt sich die Behauptung.

§ 3. Der Spezialfall der hyperkomplexen Zahlentheorie.

Bis zum Schluß der Arbeit sei jetzt $\mathfrak{O}$ immer Maximalordnung einer einfachen Algebra A, $\mathfrak{o}$ die Hauptordnung eines Körpers K, der den Grundkörper P von A umfaßt und im Zentrum Z von A enthalten ist: $\mathsf{P} \leqq \mathsf{K} \leqq \mathsf{Z} \leqq A$. P wird als Quotientenkörper eines Noetherschen 5-Axiomerings $\mathfrak{r}$ und Z als separable Erweiterung über P vorausgesetzt.

Ich betrachte zunächst den Spezialfall einer *kommutativen* Algebra A, da seine Behandlung besonders einfach ist.

Hauptsatz $\mathbf{a_1}$. *Für zwei Ideale* [14]) *$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ des Ringes $\mathfrak{O}$ gilt*

$$N\mathfrak{A}\mathfrak{B} = N\mathfrak{A} \cdot N\mathfrak{B}.$$

Beweis. Man bestätigt die Behauptung durch Untersuchung der Struktur des

[14]) Von den in diesem Paragraphen vorkommenden Idealen setze ich — wie allgemein üblich — voraus, daß sie *nichtsingulär* sind, d. h. mindestens einen Nichtnullteiler enthalten.

Restklassenmoduls $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Mod $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist $\mathfrak{A}$ bekanntlich Hauptideal und daher $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ein zyklischer (von einem Element erzeugbarer) Modul; außerdem ist $\mathfrak{B}$ das annullierende Ideal (vgl. Fußnote 3) von $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Infolgedessen ist $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{O}/\mathfrak{B}$ isomorph, also

$$\mathfrak{d}\{\mathfrak{A}_0/(\mathfrak{A}\mathfrak{B})_0\} = N\mathfrak{B}\,.$$

Nach Satz V (Einleitung) wird daher

$$N\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{d}\{(\mathfrak{O}/\mathfrak{A}\mathfrak{B})_0\} = \mathfrak{d}\{\mathfrak{O}_0/\mathfrak{A}_0\}\cdot\mathfrak{d}\{\mathfrak{A}_0/(\mathfrak{A}\mathfrak{B})_0\} = N\mathfrak{A}\cdot N\mathfrak{B}\,.$$

In der Idealtheorie einer Maximalordnung $\mathfrak{O}$ betrachtet man neben den ganzen (in $\mathfrak{O}$ enthaltenen) Idealen noch gebrochene Ideale, die sich bekanntlich als Quotienten ganzer Ideale darstellen lassen. *Für die gebrochenen Ideale $\mathfrak{C}$ läßt sich jetzt* mit Hilfe des Hauptsatzes $\mathfrak{a}_1$ *ebenfalls eine Norm $N\mathfrak{C}$ bezüglich $\mathfrak{o}$ definieren, indem man — unter $\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ irgendeine Darstellung von $\mathfrak{C}$ als Quotient ganzer Ideale verstanden — $N\mathfrak{C} = \frac{N\mathfrak{A}}{N\mathfrak{B}}$ setzt.* Hierdurch ist $N\mathfrak{C}$ wegen des Hauptsatzes $\mathfrak{a}_1$ *eindeutig* festgelegt; denn für ganze Ideale $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ folgt aus $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}'}$, daß $\mathfrak{A}\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}\mathfrak{A}'$, also auch

$$N\mathfrak{A}\cdot N\mathfrak{B}' = N\mathfrak{B}\cdot N\mathfrak{A}', \qquad \frac{N\mathfrak{A}}{N\mathfrak{B}} = \frac{N\mathfrak{A}'}{N\mathfrak{B}'}$$

gilt. *Durch die Festsetzung*

$$N\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{N\mathfrak{A}}{N\mathfrak{B}}$$

wird der Gültigkeitsbereich des Hauptsatzes $\mathfrak{a}_1$ *auf das Gebiet aller ganzen und gebrochenen Ideale ausgedehnt.*

Ist A ein algebraischer Zahlkörper endlichen Grades, so pflegt man in der Zahlentheorie eine Norm $n(\mathfrak{A})$ bezüglich $\mathfrak{o}$ als das Produkt aller zu $\mathfrak{A}$ relativ konjugierten Ideale $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$ einzuführen: $n(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}'\cdots$. Für $n(\mathfrak{A})$ gilt bekanntlich

1) $n(\mathfrak{A}) = [n(\mathfrak{P}_1)]^{e_1}\cdots[n(\mathfrak{P}_k)]^{e_k}$, wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1^{e_1}\cdots\mathfrak{P}_k^{e_k}$ die Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in das Produkt paarweise teilerfremder Primidealpotenzen bedeutet,

2) $n(\mathfrak{P}_\varkappa) = (\mathfrak{P}_\varkappa \cap \mathfrak{o})^{f_\varkappa}$, falls $\mathfrak{P}_\varkappa$ bezüglich $\mathfrak{o}$ den Grad $f_\varkappa$ hat. Nun ist nach Satz 3 (§ 1) auch

3) $$N\mathfrak{P}_\varkappa = (\mathfrak{P}_\varkappa \cap \mathfrak{o})^{f_\varkappa}$$

und nach dem Hauptsatz $\mathfrak{a}_1$

4) $$N\mathfrak{A} = (N\mathfrak{P}_1)^{e_1}\cdots(N\mathfrak{P}_k)^{e_k}\,,$$

was übrigens auch unmittelbar aus Satz 9 (§ 2) hervorgeht, da der $\mathfrak{O}$-Modul $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}_\varkappa^{e_\varkappa}$ bekanntlich die Kompositionsreihenlänge $e_\varkappa$ hat. *Ein Vergleich der Formeln* 1), 2), 3), 4) *zeigt, daß auch im Spezialfall der algebraischen Zahlentheorie die Normendefinition dieser Arbeit mit der üblichen gleichwertig ist.*

Im *Nichtkommutativen*, dem ich mich jetzt zuwende, betrachte ich gleichzeitig *alle* Maximalordnungen $\mathfrak{O}_{11}, \mathfrak{O}_{22}, \ldots$ von A und alle (*nichtsingulären*) Ideale [14]) der Ringe $\mathfrak{O}_{ii}$. Ich bezeichne diese Ideale mit großen deutschen Buchstaben mit angehängten Doppelindizes, z. B. $\mathfrak{A}_{ij}$, wodurch zum Ausdruck gebracht werden soll, daß $\mathfrak{O}_{ii}$ die Links-, $\mathfrak{O}_{jj}$ die Rechtsordnung von $\mathfrak{A}_{ij}$ ist. Im Fall $i \neq j$ hat man, da man $\mathfrak{A}_{ij}$ ebenso gut als Linksideal in $\mathfrak{O}_{ii}$ wie als Rechtsideal in $\mathfrak{O}_{jj}$ ansehen kann, zunächst eine rechts- und eine linksseitige Norm $N_r\mathfrak{A}_{ij}$ und $N_l\mathfrak{A}_{ij}$ zu unterscheiden. Wir werden aber sehen, daß beide Normen übereinstimmen, so daß man schließlich doch von einer eindeutig bestimmten

Norm $N\mathfrak{A}_{ij} = N_r\mathfrak{A}_{ij} = N_l\mathfrak{A}_{ij}$ sprechen kann. Hauptziel der folgenden Überlegungen ist zunächst der Beweis des bekannten, im Nichtkommutativen für eigentliche Idealprodukte geltenden Analogons zu Hauptsatz a_1, der sich aus einigen vorbereitenden Sätzen ergeben wird, die ich jetzt vorausschicke.

Satz 11. *Gleichseitige Primideale, die durch Transformation auseinander hervorgehen, haben dieselbe Norm:*

$$N\mathfrak{P}_{ii} = N(\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{P}_{ii}\mathfrak{A}_{ji}^{-1}).$$

Beweis. Zur Abkürzung werde $\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{P}_{ii}\mathfrak{A}_{ji}^{-1} = \mathfrak{P}_{jj}$ gesetzt. Es ist dann $\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{P}_{ii} = \mathfrak{P}_{jj}\mathfrak{A}_{ji}$, also auch

(1) $$\mathfrak{A}_{ji_0}/(\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{P}_{ii})_0 = \mathfrak{A}_{ji_0}/(\mathfrak{P}_{jj}\mathfrak{A}_{ji})_0.$$

Da man $\mathfrak{A}_{ji}$ als ganzes Ideal voraussetzen darf, ergibt sich aus $\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{P}_{ii} = \mathfrak{P}_{jj}\mathfrak{A}_{ji}$, daß $\mathfrak{P}_{ii}$ und $\mathfrak{P}_{jj}$ bei der Darstellung als eigentliche Produkte unzerlegbarer Ideale in gleichviele Faktoren zerfallen. Daher haben $\mathfrak{O}_{jj}/\mathfrak{P}_{jj}$ und $\mathfrak{A}_{ji}/(\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{P}_{ii})$, als Linksmoduln in bezug auf $\mathfrak{O}_{jj}/\mathfrak{P}_{jj}$ aufgefaßt, dieselbe Kompositionsreihenlänge [15]), woraus weiter folgt, daß diese Moduln sogar isomorph sein müssen, da ihr Operatorenring $\mathfrak{O}_{jj}/\mathfrak{P}_{jj}$ zweiseitig einfach und vollständig reduzibel (direkte Summe endlich vieler, einfacher Linksideale) ist; es gilt daher auch

(2) $$\mathfrak{O}_{jj_0}/\mathfrak{P}_{jj_0} \cong \mathfrak{A}_{ji_0}/(\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{P}_{ii})_0.$$

Durch eine entsprechende, nur unwesentlich modifizierte Überlegung beweist man

(3) $$\mathfrak{O}_{ii_0}/\mathfrak{P}_{ii_0} \cong \mathfrak{A}_{ji_0}/(\mathfrak{P}_{jj}\mathfrak{A}_{ji})_0,$$

woraus mit (1) und (2) zusammen die Behauptung $N\mathfrak{P}_{ii} = N\mathfrak{P}_{jj}$ unmittelbar hervorgeht.

Satz 12. *$\mathfrak{P}_{jk}$ sei ein unzerlegbares Ideal. Ist $\mathfrak{P}_{ii}$ irgendein durch $\mathfrak{P}_{jk}$ teilbares gleichseitiges Primideal und zerfällt $\mathfrak{P}_{ii}$ in das eigentliche Produkt von n unzerlegbaren Faktoren, so ist*

$$N\mathfrak{P}_{ii} = (N_l\mathfrak{P}_{jk})^n = (N_r\mathfrak{P}_{jk})^n.$$

Bei unzerlegbaren Idealen ist infolgedessen die linksseitige Norm mit der rechtsseitigen identisch:

$$N_l\mathfrak{P}_{jk} = N_r\mathfrak{P}_{jk}.$$

Beweis. Da $\mathfrak{P}_{jk}$ in $\mathfrak{P}_{ii}$ aufgehen soll, gibt es zwei ganze Ideale $\mathfrak{A}_{ij}$, $\mathfrak{A}_{ki}$, die der Bedingung $\mathfrak{P}_{ii} = \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{P}_{jk}\mathfrak{A}_{ki}$ genügen. Ich setze $\mathfrak{P}_{kk} = \mathfrak{A}_{ki}\mathfrak{P}_{ii}\mathfrak{A}_{ki}^{-1} = \mathfrak{A}_{ki}\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{P}_{jk}$. Es ist dann $N\mathfrak{P}_{ii} = N\mathfrak{P}_{kk}$. Zur Bestätigung der Gleichung $N\mathfrak{P}_{ii} = (N\mathfrak{P}_{jk})^n$ genügt es daher, $N\mathfrak{P}_{kk} = (N_r\mathfrak{P}_{jk})^n$ zu beweisen. Das letztere ergibt sich aber — nach Satz IV (Einleitung) — unmittelbar daraus, daß $\mathfrak{O}_{kk}/\mathfrak{P}_{kk}$ in die direkte Summe von *genau n* einfachen $\mathfrak{O}_{kk}$-Rechtsmoduln zerfällt, die alle mit $\mathfrak{O}_{kk}/\mathfrak{P}_{jk}$ isomorph sind. Genauso beweist man $N\mathfrak{P}_{ii} = (N_l\mathfrak{P}_{jk})^n$, nur muß man jetzt an Stelle von $\mathfrak{P}_{kk}$ das (zweiseitige) Primideal $\mathfrak{P}_{jj} = \mathfrak{A}_{ij}^{-1}\mathfrak{P}_{ii}\mathfrak{A}_{ij} = \mathfrak{P}_{jk}\mathfrak{A}_{ki}\mathfrak{A}_{ij}$ des Ringes $\mathfrak{O}_{jj}$, an Stelle einer direkten Summenzerlegung von $\mathfrak{O}_{kk}/\mathfrak{P}_{kk}$ in einfache $\mathfrak{O}_{kk}$-*Rechts*moduln eine solche von $\mathfrak{O}_{jj}/\mathfrak{P}_{jj}$ in einfache $\mathfrak{O}_{jj}$-*Links*moduln betrachten.

Aus den Sätzen 11 und 12 folgt

Satz 13. *Zwei unzerlegbare Ideale $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}$, $\mathfrak{P}_{\gamma\delta}$ haben stets dieselbe Norm, wenn $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}$ in dem gleichseitigen Primideal $\mathfrak{P}_{ii}$, $\mathfrak{P}_{\gamma\delta}$ in dem gleichseitigen Primideal $\mathfrak{P}_{jj}$ aufgeht und $\mathfrak{P}_{ii}$, $\mathfrak{P}_{jj}$ durch Transformation auseinander hervorgehen:* $\mathfrak{P}_{ii} = \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{P}_{jj}\mathfrak{A}_{ij}^{-1}$.

[15]) An sich kann man zunächst nur schließen, daß $\mathfrak{O}_{jj}/\mathfrak{P}_{jj}$ und $\mathfrak{A}_{ji}/(\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{P}_{ii})$ als Linksmoduln in bezug auf $\mathfrak{O}_{jj}$ gleiche Kompositionsreihenlänge haben. Da jedoch beide Moduln linksseitig von $\mathfrak{P}_{jj}$ annulliert werden, lassen sie sich auch als Linksmoduln in bezug auf $\mathfrak{O}_{jj}/\mathfrak{P}_{jj}$ deuten, was auf die Kompositionsreihen keinen Einfluß hat.

Satz 14. *Für unzerlegbare Ideale $\mathfrak{P}_{jk}$, $\mathfrak{P}_{ki}$ und irgendein ganzes Ideal $\mathfrak{A}_{ij}$ gilt*

(IIa) $$N_l(\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{P}_{jk}) = N_l\mathfrak{A}_{ij}\cdot N\mathfrak{P}_{jk}\,,$$

(IIb) $$N_r(\mathfrak{P}_{ki}\mathfrak{A}_{ij}) = N\mathfrak{P}_{ki}\cdot N_r\mathfrak{A}_{ij}\,.$$

Beweis. Nach Satz V (Einleitung) ist

(1) $$N_l(\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{P}_{jk}) = N_l\mathfrak{A}_{ij}\cdot \mathfrak{d}\{\mathfrak{A}_{ij_0}/(\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{P}_{jk})_0\}\,.$$

Da $\mathfrak{A}_{ij}/\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{P}_{jk}$ ein einfacher (also auch zyklischer!) $\mathfrak{O}_{ii}$-Linksmodul ist, gibt es in $\mathfrak{O}_{ii}$ ein (natürlich unzerlegbares) Ideal $\mathfrak{P}_{il}$ (mit der Linksordnung $\mathfrak{O}_{ii}$) derart, daß die $\mathfrak{O}_{ii}$-Linksmoduln $\mathfrak{O}_{ii}/\mathfrak{P}_{il}$, $\mathfrak{A}_{ij}/(\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{P}_{jk})$ isomorph sind. Das annullierende Ideal dieser Moduln (vgl. Fußnote 3) ist offenbar das durch $\mathfrak{P}_{il}$ teilbare, zweiseitige Primideal $\mathfrak{P}_{ii}$ des Ringes $\mathfrak{O}_{ii}$; infolgedessen wird

$$\mathfrak{P}_{ii}\mathfrak{A}_{ij} \leqq \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{P}_{jk},\qquad \mathfrak{A}_{ij}^{-1}\mathfrak{P}_{ii}\mathfrak{A}_{ij} \leqq \mathfrak{P}_{jk}$$

und daher nach Satz 13

$$N\mathfrak{P}_{jk} = N\mathfrak{P}_{il} = \mathfrak{d}\{(\mathfrak{O}_{ii}/\mathfrak{P}_{il})_0\} = \mathfrak{d}\{\mathfrak{A}_{ij_0}/(\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{P}_{jk})_0\}\,,$$

was mit (1) zusammen (IIa) ergibt. Von einigen selbstverständlichen Modifikationen abgesehen, beweist man (IIb) genau so wie (IIa).

Aus Satz 14 erhält man jetzt unmittelbar

Hauptsatz b. *Links- und Rechtsnorm eines ganzen Ideals $\mathfrak{A}_{ij}$ stimmen überein.*

Beweis. Zerlegt man $\mathfrak{A}_{ij}$ in das eigentliche Produkt unzerlegbarer Ideale $\mathfrak{A}_{ij} = \mathfrak{P}_{i\alpha}\cdot\mathfrak{P}_{\alpha\beta}\cdots\mathfrak{P}_{\lambda j}$, so wird nach Satz 14

I. $$N_l\mathfrak{A}_{ij} = N\mathfrak{P}_{i\alpha}\cdot N\mathfrak{P}_{\alpha\beta}\cdots N\mathfrak{P}_{\lambda j} = N_r\mathfrak{A}_{ij}\,.$$

Hauptsatz $\mathfrak{a}_2$. *Die Norm des eigentlichen Produkts ganzer Ideale ist gleich dem Produkt aus den Normen der einzelnen Faktoren:*

II. $$N(\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{B}_{jk}) = N\mathfrak{A}_{ij}\cdot N\mathfrak{B}_{jk}\,.$$

Beweis. Folgt aus Satz 14, wenn man $\mathfrak{A}_{ij}$ und $\mathfrak{B}_{jk}$ in das eigentliche Produkt unzerlegbarer Faktoren zerlegt.

Die beiden Hauptsätze $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}$ wurden nur für ganze Ideale bewiesen und ausgesprochen. Selbstverständlich gelten sie aber auch für gebrochene Ideale, was sich leicht in ähnlicher Weise beweisen läßt wie die Verallgemeinerung des Hauptsatzes $\mathfrak{a}_1$; man beachte dabei, daß jedes gebrochene Ideal $\mathfrak{C}_{ij}$ sich als Quotient von der Gestalt $\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{B}_{jj}^{-1}$ darstellen läßt, wo $\mathfrak{A}_{ij}$, $\mathfrak{B}_{jj}$ ganz sind und $\mathfrak{B}_{jj}$ insbesondere *gleichseitig* ist.

Herr Hasse hat für die in diesem Paragraphen betrachteten Ideale $\mathfrak{C}_{ij}$ eine $\mathfrak{p}$-adisch definierte Norm eingeführt [16]), die ich für den Augenblick mit $n(\mathfrak{C}_{ij})$ bezeichne. Ich will noch beweisen, *daß $n(\mathfrak{C}_{ij})$ mit $N\mathfrak{C}_{ij}$ übereinstimmt*, wobei ich der Einfachheit halber den Ring $\mathfrak{o}$ mit dem Zentrum $\mathfrak{z}$ der Ringe $\mathfrak{O}_{ii}$ identifiziere, was natürlich keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Offenbar genügt es, $\mathfrak{C}_{ij}$ unzerlegbar vorauszusetzen, da sowohl für die Norm n wie N der Normenproduktsatz (im Sinne des Hauptsatzes $\mathfrak{a}_2$) gilt. Bei einem unzerlegbaren Ideal $\mathfrak{P}_{ij}$ ist auf Grund des Satzes 3 (§ 1) $N\mathfrak{P}_{ij} = \mathfrak{p}^f$, wenn $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_{ij}\frown\mathfrak{z}$ das Verengungsideal von $\mathfrak{P}_{ij}$ in $\mathfrak{z}$, und f den Grad von $\mathfrak{P}_{ij}$ in bezug auf $\mathfrak{z}$ bedeutet. Auf Grund desselben Satzes ist an der Stelle $\mathfrak{p}$ $N(\mathfrak{P}_{ij_\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}_\mathfrak{p}^{f_\mathfrak{p}}$, wenn $f_\mathfrak{p}$ den Grad von $\mathfrak{P}_{ij_\mathfrak{p}}$ in bezug auf $\mathfrak{z}_\mathfrak{p}$ bezeichnet und an jeder von $\mathfrak{p}$ verschiedenen Stelle $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ $N(\mathfrak{P}_{ij_\mathfrak{q}}) = \mathfrak{z}_\mathfrak{q}$. Hieraus folgt nach Satz 65 der zitierten Arbeit von Herrn Hasse $n(\mathfrak{P}_{ij}) = \mathfrak{p}^{f_\mathfrak{p}}$. Nun gibt es bekanntlich eine *isomorphe* (umkehrbar eindeutige, relationstreue) Abbildung

[16]) H. Hasse, Über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Ann. **104** (1931), § 8.

von $\mathfrak{O}_{ii_\mathfrak{p}}/\mathfrak{P}_{ij_\mathfrak{p}}$ auf $\mathfrak{O}_{ii}/\mathfrak{P}_{ij}$, bei der $\mathfrak{z}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{z}/\mathfrak{p}$ abgebildet wird. Daher ist $f = f_\mathfrak{p}$, womit

$$N\mathfrak{P}_{ij} = \mathfrak{p}^f = \mathfrak{p}^{f_\mathfrak{p}} = n(\mathfrak{P}_{ij})$$

bewiesen ist.

Neben den beiden in den Hauptsätzen a und b zum Ausdruck gebrachten Ergebnissen gilt für die Idealnormen der hyperkomplexen und der algebraischen Zahlentheorie noch eine weitere interessante Tatsache:

Hauptsatz c. *Zwei Ideale* $\mathfrak{A}_{ij}$ *und* $\mathfrak{B}_{kl}$ *sind stets und nur dann als* $\mathfrak{o}$*-Moduln isomorph, wenn ihre Normen bezüglich* $\mathfrak{o}$ *äquivalent sind*, d. h. zur selben (absoluten) Idealklasse der Ordnung $\mathfrak{o}$ gehören.

Zum Beweis dieses Satzes benötige ich

Hilfssatz 1. $\mathfrak{M}$ sei ein von endlich vielen Elementen erzeugbarer, rein-unendlicher [17]) $\mathfrak{o}$-Modul, $\mathfrak{M}'$ ein Untermodul von $\mathfrak{M}$, für den $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}'$ endlich [17]) ist. Es gilt dann

$$Kl(\mathfrak{M}') = Kl(\mathfrak{M}) \cdot Kl\{\mathfrak{d}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}')\}.$$

Beweis des Hilfssatzes. Da der Modul $\mathfrak{M}$ voraussetzungsgemäß rein-unendlich ist, läßt er sich in einen Modul $\mathfrak{M}^*$ einbetten, dessen Operatorenring der Quotientenkörper K von $\mathfrak{o}$ ist. Man erhält $\mathfrak{M}^*$ — ähnlich wie den Quotientenring eines kommutativen Ringes — indem man neue Symbole $\frac{\alpha}{a}$ einführt, wo α ein Element aus $\mathfrak{M}$ und a ein Element aus $\mathfrak{o}$ bedeutet, und festsetzt, daß $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b}$ dann und nur dann gilt, wenn $\alpha b = \beta a$ ist, und daß

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\gamma}{c} = \frac{\alpha c + \gamma a}{ac}, \quad \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{d}{e} = \frac{\alpha d}{ae}$$

sein soll.

Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ganze Ideale des Ringes $\mathfrak{o}$, von denen $\mathfrak{a}$ zur Klasse [17]) $Kl(\mathfrak{M})$ und $\mathfrak{b}^{-1}$ zur Klasse $Kl(\mathfrak{M}')$ gehören möge. Nach dem Struktursatz von E. Steinitz (vgl. DM § 4) lassen sich in $\mathfrak{M}^*$ Elemente $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*$ und $\beta_1^*, \ldots, \beta_k^*$ so finden, daß $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ in die direkten Summen

$$\mathfrak{M} = \alpha_1^* \mathfrak{o} + \cdots + \alpha_{k-1}^* \mathfrak{o} + \alpha_k^* \mathfrak{a}$$
$$\mathfrak{M}' = \beta_1^* \mathfrak{o} + \cdots + \beta_{k-1}^* \mathfrak{o} + \beta_k^* \mathfrak{b}^{-1}$$

zerfallen. Für die $\mathfrak{o}$-Moduln

$$\widetilde{\mathfrak{M}} = \alpha_1^* \mathfrak{o} + \cdots + \alpha_k^* \mathfrak{o}$$

und

$$\widetilde{\mathfrak{M}}' = \beta_1^* \mathfrak{o} + \cdots + \beta_k^* \mathfrak{o}$$

gilt dann

$$\widetilde{\mathfrak{M}} \geqq \mathfrak{M} \geqq \mathfrak{M}' \geqq \widetilde{\mathfrak{M}}'$$

und

$$(1) \qquad \mathfrak{d}(\widetilde{\mathfrak{M}}/\mathfrak{M}) \cdot \mathfrak{d}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}') \cdot \mathfrak{d}(\mathfrak{M}'/\widetilde{\mathfrak{M}}') = \mathfrak{d}(\widetilde{\mathfrak{M}}/\widetilde{\mathfrak{M}}') \quad \text{(Satz V, Einleitung).}$$

Nun ist, wie man leicht bestätigt,

$$\mathfrak{d}(\widetilde{\mathfrak{M}}/\mathfrak{M}) = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{d}(\mathfrak{M}'/\widetilde{\mathfrak{M}}') = \mathfrak{b}$$

und $\mathfrak{d}(\widetilde{\mathfrak{M}}/\widetilde{\mathfrak{M}}')$ ein Hauptideal, nämlich das von der Determinante der Übergangsmatrix

[17]) Bezüglich der Begriffe, Bezeichnungen und Sätze, die bei der Formulierung und beim Beweis des Hilfssatzes 1 und in den anschließenden Betrachtungen benutzt werden, vergleiche man § 4 der Arbeit DM (siehe Fußnote 1).

von $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*)$ zu $(\beta_1^*, \ldots, \beta_k^*)$ erzeugte. Hieraus folgt in Verbindung mit (1)

$$Kl(\mathfrak{M}) \cdot Kl\{\mathfrak{d}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}')\} = Kl(\mathfrak{a}) \cdot Kl\{\mathfrak{d}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}')\} = Kl(\mathfrak{b}^{-1}) = Kl(\mathfrak{M}').$$

Beweis des Hauptsatzes c. Da die Ideale $\mathfrak{A}_{ij}$ und $\mathfrak{B}_{kl}$ als $\mathfrak{o}$-Moduln rein-unendlich sind und in bezug auf den Quotientenkörper von $\mathfrak{o}$ denselben Rang haben (so daß die Anzahl der direkt-unzerlegbaren Summanden, in deren direkte Summe $\mathfrak{A}_{ij}$ und $\mathfrak{B}_{kl}$ zerfallen, nach DM, § 4, Hilfssatz 7, bei beiden Moduln dieselbe ist) sind $\mathfrak{A}_{ij}$ und $\mathfrak{B}_{kl}$ als $\mathfrak{o}$-Moduln auf Grund des Steinitzschen Struktursatzes (DM, § 4) dann und nur dann isomorph, wenn die Idealklassen $Kl(\mathfrak{A}_{ij})$ und $Kl(\mathfrak{B}_{kl})$ identisch sind. Beim Beweis des Hauptsatzes c kommt es daher nur noch darauf an, zu zeigen, daß $Kl(\mathfrak{A}_{ij})$ mit $Kl(\mathfrak{B}_{kl})$ dann und nur dann übereinstimmt, wenn $N\mathfrak{A}_{ij}$ mit $N\mathfrak{B}_{kl}$ äquivalent ist. Dies folgt aber, weil $\mathfrak{A}_{ij}$ und $\mathfrak{B}_{kl}$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit als ganze Ideale vorausgesetzt werden dürfen, sofort aus dem vorausgeschickten Hilfssatz 1, demzufolge wegen der Endlichkeit der Moduln $(\mathfrak{O}_{ii}/\mathfrak{A}_{ij})_0$, $(\mathfrak{O}_{kk}/\mathfrak{B}_{kl})_0$

$$(1)\quad \begin{cases} \text{(a)} & Kl(\mathfrak{A}_{ij}) = Kl(\mathfrak{O}_{ii}) \cdot Kl\{\mathfrak{d}(\mathfrak{O}_{ii}/\mathfrak{A}_{ij})_0\} = Kl\,\mathfrak{O}_{ii} \cdot Kl(N\mathfrak{A}_{ij}) \\ \text{(b)} & Kl(\mathfrak{B}_{kl}) = Kl(\mathfrak{O}_{kk}) \cdot Kl(N\mathfrak{B}_{kl}) \end{cases}$$

gilt. Nun ist

$$(2)\quad \begin{cases} \text{(a)} & Kl((\mathfrak{O}_{kk} \cdot \mathfrak{O}_{ii})^{-1}) = Kl\,\mathfrak{O}_{ii} \cdot Kl(N(\mathfrak{O}_{kk} \cdot \mathfrak{O}_{ii})^{-1}) \\ \text{(b)} & Kl((\mathfrak{O}_{kk} \cdot \mathfrak{O}_{ii})^{-1}) = Kl\,\mathfrak{O}_{jj} \cdot Kl(N(\mathfrak{O}_{kk} \cdot \mathfrak{O}_{ii})^{-1}), \end{cases}$$

also $Kl(\mathfrak{O}_{ii}) = Kl(\mathfrak{O}_{kk})$, woraus in Verbindung mit den Gleichungen (1) die Behauptung unmittelbar hervorgeht.

Als Spezialfall ergibt sich aus Hauptsatz c

Satz 16. *Alle Maximalordnungen der Algebra A sind als $\mathfrak{o}$-Moduln, ja sogar als $\mathfrak{z}$-Moduln isomorph, wenn $\mathfrak{z}$ die Hauptordnung des Zentrums Z von A bedeutet.* (Für Maximalordnungen von gleichem Typ ist diese Aussage natürlich trivial, bemerkenswert ist nur, daß auch Maximalordnungen verschiedener Typen als $\mathfrak{z}$-Moduln isomorph sind.)

Satz 16 gewinnt noch durch folgende Tatsache an Interesse:

Satz 17. *Ist A^* eine einfache Teilalgebra von A, die das Zentrum Z von A umfaßt, $\mathfrak{O}^*$ eine Maximalordnung von A^* und gibt es Maximalordnungen von A, welche $\mathfrak{O}^*$ als Teilmenge enthalten, so sind die letzteren, als $\mathfrak{O}^*$-Moduln aufgefaßt, im allgemeinen n i c h t isomorph, auch dann nicht, wenn A^* kommutativ (also Körper) ist. Isomorphie der $\mathfrak{O}^*$ umfassenden Maximalordnungen von A gilt in der Regel nur in dem Spezialfall $A^* = Z$.*

Beweis. Ich bestätige die Behauptung durch ein Beispiel. Es sei Z der rationale Zahlkörper, Z_n die vollständige Matrixalgebra vom Grade n über Z (Ring aller n-reihigen, quadratischen Matrizen mit rationalen Koeffizienten). Weiter sei $\tilde{A}^*$ ein algebraischer Zahlkörper n-ten Grades über Z, $\tilde{\mathfrak{O}}^*$ seine Hauptordnung; von $\tilde{A}^*$ verlangen wir überdies, daß $\tilde{\mathfrak{O}}^*$ wenigstens ein Ideal $\tilde{\mathfrak{A}}^*$ enthält, dessen n-te Potenz kein Hauptideal ist, eine Bedingung, die sich i. a. leicht erfüllen läßt. Als Modul in bezug auf den Ring $\mathfrak{z}$ aller ganzrationalen Zahlen hat $\tilde{\mathfrak{O}}^*$ immer eine aus n linear unabhängigen Elementen bestehende Basis $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n)$, die zugleich als Basis für den Körper $\tilde{A}^*$ dienen kann, wenn $\tilde{A}^*$ als Z-Modul gedeutet wird. Vermöge der durch die Basis $(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)$ vermittelten regulären Darstellung erhalten wir jetzt in $A = Z_n$ einen kommutativen Körper A^*, der auf $\tilde{A}^*$ isomorph bezogen ist, wobei $\tilde{\mathfrak{O}}^*$ in $\mathfrak{O}^*$, $\tilde{\mathfrak{A}}^*$ in $\mathfrak{A}^*$ übergeht. $\mathfrak{O}^*$ können wir gewiß in eine Maximalordnung $\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}$ von $A = Z_n$ einbetten; denn offenbar ist $\mathfrak{O}^*$ wegen der speziellen Voraussetzung über die Basis $(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)$ in der Maximalordnung $\mathfrak{O}_{\alpha\alpha} = \mathfrak{z}_n$ enthalten, wobei $\mathfrak{z}_n$ der Ring aller n-reihigen, quadratischen Matrizen mit ganzrationalen

Koeffizienten bedeutet. Wir betrachten nun das Erweiterungsideal $\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}\mathfrak{A}^*$ in $\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}$, dessen Rechtsordnung $\mathfrak{O}_{\beta\beta}$ ebenfalls $\mathfrak{O}^*$ umfaßt. In $\mathfrak{O}_{\alpha\alpha} = \mathfrak{z}_n$ ist bekanntlich jedes Ideal Hauptideal. Infolgedessen sind $\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}$ und $\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}\mathfrak{A}^*$ als Linksmoduln in bezug auf $\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}$, also auch als $\mathfrak{O}^*$-Linksmoduln isomorph. Es ist daher

$$Kl^*(\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}) = Kl^*(\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}\mathfrak{A}^*) = Kl^*(\mathfrak{A}^*\mathfrak{O}_{\beta\beta})$$

(wobei das Symbol Kl^* diesmal eine Idealklasse des Körpers A^* bezeichnet). Wie man leicht einsieht, ist

$$Kl^*(\mathfrak{A}^*\mathfrak{O}_{\beta\beta}) = (Kl^*(\mathfrak{A}^*))^n \cdot Kl^*(\mathfrak{O}_{\beta\beta}).$$

Wären nun die beiden Ordnungen $\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}$, $\mathfrak{O}_{\beta\beta}$ als $\mathfrak{O}^*$-Moduln isomorph, so wäre

$$Kl^*(\mathfrak{O}_{\beta\beta}) = Kl^*(\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}) = [Kl^*(\mathfrak{A}^*)]^n \cdot Kl^*(\mathfrak{O}_{\beta\beta})$$
$$[Kl^*(\mathfrak{A}^*)]^n = Kl^*(\mathfrak{O}^*),$$

d. h. $(\mathfrak{A}^*)^n$ Hauptideal, was der Voraussetzung widerspricht. Die beiden $\mathfrak{O}^*$ umfassenden Ordnungen $\mathfrak{O}_{\alpha\alpha}$ und $\mathfrak{O}_{\beta\beta}$ können also als $\mathfrak{O}^*$-Moduln nicht isomorph sein.

Im Anschluß an Hauptsatz c definiere ich jetzt noch einen neuen Klassenbegriff für die Ideale der Maximalordnungen von A, der einerseits als natürliche Verallgemeinerung des in der algebraischen Zahlentheorie gebräuchlichen Klassenbegriffs angesehen werden kann, andrerseits die Definition einer Multiplikation beliebiger Klassen ermöglicht, derart, daß die letzteren bei multiplikativer Verknüpfung eine gewöhnliche, abelsche Gruppe bilden, die mit der Gruppe $\mathfrak{h}^n$ isomorph ist. n bedeutet dabei den Index von A, $\mathfrak{h}^n$ die Gruppe der n-ten Potenzen aller Elemente der (absoluten) Idealklassengruppe $\mathfrak{h}$ des Zentrums Z von A.

Zur Orientierung werfen wir zunächst einen kurzen Blick auf den kommutativen Spezialfall: Ist die Algebra A kommutativ (also Körper), so sind zwei Ideale der Hauptordnung $\mathfrak{O}$ von A bekanntlich dann und nur dann äquivalent, wenn sie als $\mathfrak{O}$-Moduln isomorph sind [18]), eine Aussage, die ja auch in dem Struktursatz von E. Steinitz (DM, § 4) als Spezialfall ($k = 1$, $\mathfrak{E} = 0$) enthalten ist. Die Idealklassen von A können also auch als die Systeme untereinander isomorpher Ideale erklärt werden [18]), wobei die Ideale als $\mathfrak{O}$-Moduln aufzufassen sind.

Im Nichtkommutativen wird man bei dem Bestreben, den so definierten Klassenbegriff auf die Ideale $\mathfrak{A}_{ij}$ der Maximalordnungen von A zu übertragen, zunächst einen Ring R aufzusuchen haben, der in allen Maximalordnungen von A enthalten ist, und zwei Ideale $\mathfrak{A}_{ij}$, $\mathfrak{B}_{kl}$ äquivalent nennen, wenn sie als R-Moduln isomorph sind. Der nächstliegende Ring mit dieser Eigenschaft ist die Hauptordnung $\mathfrak{z}$ des Zentrums Z von A. Es scheint daher natürlich, die folgende Definition aufzustellen:

Zwei Ideale $\mathfrak{A}_{ij}$, $\mathfrak{B}_{kl}$ heißen *äquivalent*, wenn sie als $\mathfrak{z}$-Moduln isomorph sind. Auf

[18]) Ein entsprechender Satz gilt übrigens für die nichtsingulären (vgl. Fußnote 14) Ideale eines beliebigen kommutativen Ringes. Sind zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ eines solchen Ringes $\mathfrak{r}$ äquivalent, gilt also $c_1\mathfrak{a} = c_2\mathfrak{b}$, wo c_1, c_2 Nichtnullteiler von $\mathfrak{r}$ bedeuten, so gibt es zu jedem a aus $\mathfrak{a}$ ein eindeutig bestimmtes $b \in \mathfrak{b}$, derart, daß $c_1 a = c_2 b$ gilt und umgekehrt. Die Zuordnung $a \leftrightarrow b$, die entsteht, wenn jedem $a \in \mathfrak{a}$ das der Gleichung $c_1 a = c_2 b$ genügende $b \in \mathfrak{b}$ zugewiesen wird, zeigt — wie man leicht nachrechnet —, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ als $\mathfrak{r}$-Moduln isomorph sind. Weiß man umgekehrt, daß zwei nichtsinguläre Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ des Ringes $\mathfrak{r}$ als $\mathfrak{r}$-Moduln isomorph sind, so läßt sich die Äquivalenz zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ folgendermaßen beweisen: a sei irgendein Nichtnullteiler und a' ein zweites Element aus $\mathfrak{a}$. Bei der voraussetzungsgemäß existierenden, operatorisomorphen Abbildung von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{b}$ möge etwa a in b und a' in b' übergehen. b ist dann wieder ein Nichtnullteiler von $\mathfrak{r}$, weil aus $cb = 0$ mit $c \neq 0$ sofort $ca = 0$ folgen würde. Weiter muß jede zwischen a und a' bestehende Relation $ac + a'c' = 0$ auch zwischen b und b' gelten: $bc + b'c' = 0$. Hieraus folgt $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ oder $ab' = ba'$. Läßt man a' alle Elemente aus $\mathfrak{a}$ durchlaufen, so ergibt sich die gewünschte Beziehung $b\mathfrak{a} = a\mathfrak{b}$, in der a und b keine Nullteiler von $\mathfrak{r}$ sind.

Grund dieser Äquivalenzrelation zerfällt die Menge der Ideale $\mathfrak{A}_{ij}$ in Klassen, *die Idealklassen* $\mathfrak{Kl}$ *von* A. Das System der mit den Maximalordnungen von A äquivalenten Ideale heißt die *Hauptklasse* der Algebra. (Vgl. Satz 16.) Im Kommutativen gehen diese Begriffe offenbar in die üblichen über. — Ich beweise zunächst

Hilfssatz 2. Zu jedem Ideal $\mathfrak{A}_{ij}$ und einer beliebigen Maximalordnung $\mathfrak{O}_{kk}$ kann stets ein zu $\mathfrak{A}_{ij}$ äquivalentes Ideal gefunden werden, dessen Linksordnung mit der vorgegebenen übereinstimmt.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf ich annehmen, $\mathfrak{A}_{ij}$ sei ein ganzes Ideal, da jedes Ideal mit einem ganzen äquivalent ist, was sich genau wie im kommutativen Spezialfall beweisen läßt. Ist das Ideal $\mathfrak{A}_{ij}$ unzerlegbar, so ist es Teiler eines gleichseitigen Primideals $\mathfrak{P}_{ii}$ von $\mathfrak{O}_{ii}$. Für jedes unzerlegbare Ideal $\mathfrak{B}_{kl}$ (mit der Linksordnung $\mathfrak{O}_{kk}$), das in dem gleichseitigen Primideal $\mathfrak{P}_{kk} = (\mathfrak{O}_{kk}\mathfrak{O}_{ii})\,\mathfrak{P}_{ii}(\mathfrak{O}_{kk}\mathfrak{O}_{ii})^{-1}$ aufgeht, gilt dann nach Satz 13 $N\mathfrak{A}_{ij} = N\mathfrak{B}_{kl}$. Nach Hauptsatz c ist daher $\mathfrak{B}_{kl}$ zu $\mathfrak{A}_{ij}$ äquivalent, also von der verlangten Beschaffenheit. Ist $\mathfrak{A}_{ij}$ nicht unzerlegbar, so werde $\mathfrak{A}_{ij}$ in unzerlegbare Ideale ($\mathfrak{A}_{ij} = \mathfrak{P}_{i\alpha}\cdot\mathfrak{P}_{\alpha\beta}\cdots\mathfrak{P}_{\lambda j}$) zerlegt. Nach dem bereits bewiesenen Teil des Hilfssatzes gibt es zu $\mathfrak{P}_{i\alpha}$ ein äquivalentes Ideal $\mathfrak{P}_{k\alpha'}$, zu $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}$ ein äquivalentes $\mathfrak{P}_{\alpha'\beta'}$ usw. derart, daß

$$N\mathfrak{A}_{ij} = N\mathfrak{P}_{i\alpha}\cdot N\mathfrak{P}_{\alpha\beta}\cdots N\mathfrak{P}_{\lambda j} = N\mathfrak{P}_{k\alpha'}N\mathfrak{P}_{\alpha'\beta'}\cdots N\mathfrak{P}_{\lambda' l} = N\mathfrak{B}_{kl}$$

gilt, wenn $\mathfrak{P}_{k\alpha'}\cdot\mathfrak{P}_{\alpha'\beta'}\cdots\mathfrak{P}_{\lambda' l} = \mathfrak{B}_{kl}$ gesetzt wird. $\mathfrak{B}_{kl}$ ist wieder zu $\mathfrak{A}_{ij}$ äquivalent und die Linksordnung von $\mathfrak{B}_{kl}$ mit $\mathfrak{O}_{kk}$ identisch.

Zwei Idealklassen $\mathfrak{Kl}_1$, $\mathfrak{Kl}_2$ heißen *multiplizierbar*, wenn in $\mathfrak{Kl}_1$ ein Ideal $\mathfrak{A}_{ij}$ und in $\mathfrak{Kl}_2$ ein Ideal $\mathfrak{B}_{jl}$ so gefunden werden kann, daß die Rechtsordnung von $\mathfrak{A}_{ij}$ mit der Linksordnung von $\mathfrak{B}_{jl}$ übereinstimmt; ist diese Bedingung erfüllt, so werde unter dem Produkt $\mathfrak{Kl}_1\mathfrak{Kl}_2$ die Klasse der mit dem eigentlichen Produkt $\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{B}_{jl}$ äquivalenten Ideale verstanden. Auf Grund des vorausgeschickten Hilfssatzes sind Idealklassen $\mathfrak{Kl}_1$ und $\mathfrak{Kl}_2$ in beliebiger Reihenfolge stets multiplizierbar. Wegen des Hauptsatzes c ist das Produkt $\mathfrak{Kl}_1\mathfrak{Kl}_2$ unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten eindeutig bestimmt. Die Hauptklasse spielt bei der Klassenmultiplikation offenbar die Rolle der Einheit. Außerdem existiert zu jeder Klasse $\mathfrak{Kl}$ eine reziproke $\mathfrak{Kl}^{-1}$, die mit $\mathfrak{Kl}$ multipliziert zur Hauptklasse wird; ist nämlich $\mathfrak{A}_{ij}$ irgendein Repräsentant von $\mathfrak{Kl}$, so ist $\mathfrak{Kl}^{-1}$ die Klasse der mit $\mathfrak{A}_{ij}^{-1}$ äquivalenten Ideale. — Aus der letzten Betrachtung ergibt sich

Satz 18. *Die Idealklassen der einfachen Algebra A bilden bei multiplikativer Verknüpfung eine Gruppe* $\mathfrak{H}$, *die wegen der Hauptsätze* a_2 *und* c *mit einer Untergruppe der* (absoluten) *Idealklassengruppe* $\mathfrak{h}$ *von* Z *isomorph und daher sogar abelsch ist.*

Mit Hilfe des Hauptsatzes c läßt sich die mit $\mathfrak{H}$ isomorphe Untergruppe $\mathfrak{h}'$ von $\mathfrak{h}$ genau bestimmen: Es ist $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}^n$, d. h. $\mathfrak{h}'$ die Gruppe der n-ten Potenzen der Elemente von $\mathfrak{h}$, wo n den Index von A, also n^2 den Rang von A über dem Zentrum Z bedeutet. Da die Norm eines Ideals $\mathfrak{A}_{ij}$ immer die n-te Potenz eines Ideals von $\mathfrak{z}$ ist (es gilt $N\mathfrak{A}_{ij} = (N_{red}\mathfrak{A}_{ij})^n$), so ist jedenfalls $\mathfrak{h}' \leqq \mathfrak{h}^n$; man hat also nur noch $\mathfrak{h}^n \leqq \mathfrak{h}'$ nachzuweisen.

Definitionsgemäß ist $\mathfrak{h}^n$ die Gesamtheit aller Idealklassen von Z, welche die n-te Potenz wenigstens eines Ideals von $\mathfrak{z}$ enthalten. In diesem Fall enthält die betreffende Idealklasse nach bekannten Sätzen sogar die n-te Potenz eines Ideals $\mathfrak{a}$, das zu einem vorgegebenen Ideal, insbesondere zur Diskriminante von A teilerfremd ist. Ich werde nun zeigen, daß die n-te Potenz eines zur Diskriminante von A teilerfremden Ideals $\mathfrak{a}$ immer Norm eines Ideals $\mathfrak{A}_{ij}$ der Maximalordnungen von A ist, womit die Behauptung bewiesen sein wird, da ja $\mathfrak{h}'$ nach Hauptsatz c gerade aus allen Idealklassen von A besteht, die wenigstens ein Ideal enthalten, das Norm eines Ideals $\mathfrak{A}_{ij}$ ist.

Um die Existenz eines Ideals $\mathfrak{A}_{ij}$ mit der Eigenschaft $N\mathfrak{A}_{ij} = \mathfrak{a}^n$ nachzuweisen, werde $\mathfrak{a}$ in seine Primfaktoren zerlegt: $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_k$. Da mit $\mathfrak{a}$ auch alle Primteiler $\mathfrak{p}_i$ von $\mathfrak{a}$ zur Diskriminante von A teilerfremd sind, sind die Erweiterungsideale $\mathfrak{p}_i \mathfrak{O}_{\alpha\alpha} = \mathfrak{P}_{\alpha\alpha}$ Primideale (unverzweigt), die in genau n unzerlegbare Ideale vom Grade n zerfallen [19]). Ist $\mathfrak{P}_{\alpha_1\alpha_2}$ ein unzerlegbarer Idealteiler von $\mathfrak{P}_{\alpha_1\alpha_1} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{O}_{\alpha_1\alpha_1}$, $\mathfrak{P}_{\alpha_2\alpha_3}$ ein unzerlegbarer Idealteiler von $\mathfrak{P}_{\alpha_2\alpha_2} = \mathfrak{p}_2 \mathfrak{O}_{\alpha_2\alpha_2}$ usw., so wird $N\mathfrak{P}_{\alpha_i\alpha_{i+1}} = \mathfrak{p}_i^n$, also

$$N(\mathfrak{P}_{\alpha_1\alpha_2} \cdot \mathfrak{P}_{\alpha_2\alpha_3} \cdot \mathfrak{P}_{\alpha_3\alpha_4} \cdots \mathfrak{P}_{\alpha_{k-1}\alpha_k}) = \mathfrak{a}^n,$$

womit ein Ideal mit der gesuchten Eigenschaft gefunden ist.

Zusammenfassend erhalten wir schließlich:

Hauptsatz d. *Die Idealklassen einer einfachen Algebra bilden bei multiplikativer Verknüpfung eine abelsche Gruppe $\mathfrak{H}$, deren Struktur nur vom Zentrum und dem Index n abhängt. Sie ist mit der Gruppe der n-ten Potenzen aller Elemente der absoluten Idealklassengruppe $\mathfrak{h}$ des Zentrums isomorph.*

Bemerkung. Der Idealklassenbegriff eines algebraischen Zahlkörpers läßt sich noch auf eine andere Weise auf die Ideale $\mathfrak{A}_{ij}$ der Maximalordnungen von A übertragen, indem man zwei Ideale $\mathfrak{A}_{ij}$, $\mathfrak{B}_{kl}$ äquivalent nennt, wenn zwei Nichtnullteiler c und d existieren derart, daß $N\mathfrak{A}_{ij} = N(c\mathfrak{B}_{kl}d)$ gilt. Die Idealklassen, die sich auf Grund dieser Äquivalenzrelation ergeben, lassen sich genau wie die oben eingeführten unbeschränkt multiplizieren und bilden bei multiplikativer Verknüpfung wieder eine *endliche* abelsche Gruppe $\mathfrak{H}^*$, was man genau so beweist wie Satz 18. Im Spezialfall einer vollständig zerfallenden Algebra ist $\mathfrak{H}^*$ mit der Idealklassengruppe $\mathfrak{h}$ des Zentrums isomorph; im allgemeinen Fall ist die Struktur von $\mathfrak{H}^*$ komplizierter; sie hängt vermutlich noch von der Struktur der zum Zentrum Z gehörigen Brauerschen Algebrengruppe ab.

[19]) Vgl. H. Hasse, a. a. O. [16]), Satz 81, S. 534.

Eingegangen 11. Mai 1937.

Zusatz bei der Korrektur (September 1937). Der Brandtsche Äquivalenzbegriff, bei dem zwei Links- (bezw. Rechts-)ideale einer Maximalordnung der Algebra A dann als äquivalent gelten, wenn sie durch rechts- (bezw. links-)seitige Multiplikation mit einem Nichtnullteiler des Systems A auseinander hervorgehen, läßt sich übrigens ebenfalls durch eine Isomorphiebeziehung charakterisieren: *Zwei Linksideale $\mathfrak{A}_{ij}$ und $\mathfrak{B}_{ik}$ der Ordnung $\mathfrak{O}_{ii}$ sind nämlich dann und nur dann im Brandtschen Sinne äquivalent, wenn sie als Moduln mit dem linksseitigen Operatorenring $\mathfrak{O}_{ii}$ isomorph sind; entsprechendes gilt natürlich auch für Rechtsideale.* Gibt es in A einen Nichtnullteiler c, für den $\mathfrak{A}_{ij}c = \mathfrak{A}_{ik}$ gilt, so erhält man eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{A}_{ij}$ auf $\mathfrak{A}_{ik}$, wenn man jedem a_{ij} aus $\mathfrak{A}_{ij}$ das Produkt $a_{ij}c$ aus $\mathfrak{A}_{ik}$ zuordnet. Umgekehrt läßt sich unter der Voraussetzung, daß sich $\mathfrak{A}_{ij}$ und $\mathfrak{A}_{ik}$ isomorph aufeinander beziehen lassen, leicht die Existenz eines der Bedingung $\mathfrak{A}_{ij}c = \mathfrak{A}_{ik}$ genügenden Nichtnullteilers c von A beweisen. Hierzu werde aus $\mathfrak{A}_{ij}$ ein Nichtnullteiler z des Zentrums von $\mathfrak{O}_{ii}$ und daneben noch irgendein anderes Element a_{ij} ausgewählt. Es ist dann $a_{ij}z - za_{ij} = 0$. Mit z' und a'_{ij} sollen jetzt diejenigen Elemente aus $\mathfrak{A}_{ik}$ bezeichnet werden, die den Elementen z und a_{ij} bei irgendeiner festen isomorphen Abbildung von $\mathfrak{A}_{ij}$ auf $\mathfrak{A}_{ik}$ entsprechen. Aus $a_{ij}z - za_{ij} = 0$ folgt dann, wenn man annimmt, daß $\mathfrak{A}_{ij}$ und $\mathfrak{A}_{ik}$ ganz sind, was natürlich keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, $a_{ij}z' - za'_{ij} = 0$, $a_{ij}z' = za'_{ij} = a'_{ij}z$, $a_{ij}\frac{z'}{z} = a'_{ij}$. Mit z ist offenbar auch z' Nichtnullteiler von $\mathfrak{O}_{ii}$, weil für ein von Null verschiedenes Element b des Ringes $\mathfrak{O}_{ii}$ aus $bz' = 0$ sofort $bz = 0$ hervorgehen würde. Daher ist $c = \frac{z'}{z}$ ein Nichtnullteiler von A, der für *alle* a_{ij} aus $\mathfrak{A}_{ij}$ die Gleichung $a_{ij}c = a'_{ij}$, also auch $\mathfrak{A}_{ij}c = \mathfrak{A}_{ik}$ befriedigt.